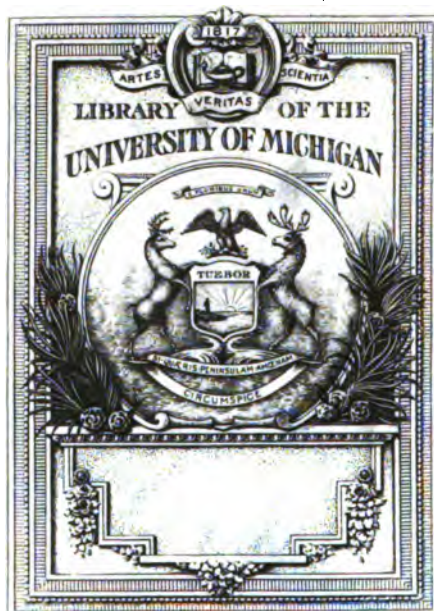



1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

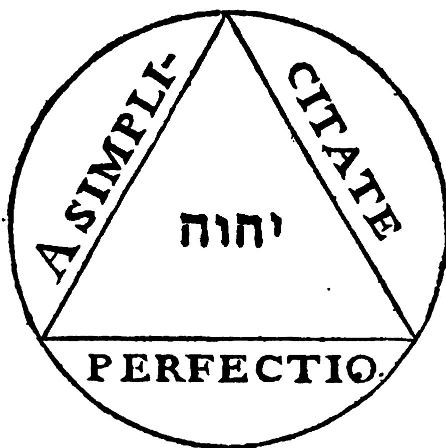
FRANCISCI DULAURENS

SPECIMINA MATHEMATICA

DUOBUS LIBRIS COMPREHENSA.

Quorum Primus Syntheticus agit de genuinis Matheseos principiis in genere, in specie autem de veris Geometriæ Elementis huc usque nondum traditis.

Secundus verò de Methodo Compositionis, atque Resolutionis fusè differit, & multa nova complectitur, quæ subtilissimam Analyseos artem mirum in modum promovent.



PARISIIS,
Apud Carolum Savreux, Bibliopolam Juratum, in atrio Templi Beatæ Mariæ sub insigni trium Virtutum.

CIↃ. IↃC. LXVII.

CVM PRIVILEGIO REGIS.

Dulaurens, François

Hist. of music
Soth
11-9-33
28344



CELSI AC PRÆPOTENTES
DOMINI, DOMINI
ORDINES GENERALES
FOEDERATI BELGII.



IRABVNTVR sanè plerique quod inter armorum strepitus, quibus Rempublicam vestram prælijs, atque triumphis jamdudum assuetam iterum Bellona exercet, ego novum aliquod ex officina Minervæ Pacis Alumnæ profectum opus CELSITVDINIBVS VESTRIS *intempestivè, sic illi putabunt, offe-*

ram. Verùm discant mores vestros, sciantque apud vos inter arma non silere leges, sed eodem tempore scientiarum, armorumque studia florere, atque esse loca ubi semper juventus vestra omnis generis doctrinæ præceptis imbuitur, & militiæ scholam, in qua Tyrones assidue ad bella erudiuntur. Et sane Rempublicam vestram, quæ sibi Marte peperit quietem, partamque tam acri legum custodia servat, armis non solum decoratam, ut Iustinianus de Imperatoria Majestate dixit, sed etiam legibus oportet esse armatam, ut utrumque tempus & belli, & pacis recte gubernari possit. His optimis artibus instructi nullo non tempore felices estis, & ita sapienter omnia administratis, ut amorem erga populos vestros, famam erga omnes mereamini. Haud ignota

loquor, sed quæ passim apud omnes gentes de Regimine Belgii multa cum admiratione memorantur. Narratur ab una parte magnos Duces, quorum fama totum terrarum orbem implevit, prima militiæ suæ rudimenta in Belgio fecisse, ab altera innumeros viros doctrinæ claritate insignes, quorum egregia apud nos extant ingenii monumenta, in ejusdem Belgii celeberrimis Academiis vel docendo, vel discendo literis operam dedisse. Cùm igitur in vobis potissimum CELSI, AC PRÆPOTENTES DOMINI ORDINES *& spes & ratio studiorum posita sit, quis consilii mei rationes non approbet, si labores, & conatus, quos in re Mathematica, omnium scientiarum utilissima, non solum exornanda, verum etiam amplificandâ adhibui, glo-*

riosissimo vestro nomini dicare voluerim, optaverim, ambiverim. De Matheseos utilitate plura hic dicere nihil attinet, postquam unus ex vobis, cujus sapientiam, atque prudentiam in consiliis, & summam in rebus agendis peritiam, ac vigilantiam non semel experti estis, ingeniosissimis inventis Geometriam locupletare non est dedignatus; qui, antequam publica munia obiret, ad exercitia Mathematica, vulgi captum superantia, & mentis sublimitatem indicantia bene temperatum animum applicuit, & hâc arduarum rerum tractatione ingentes spiritus ad fortissima quaeque prima in adolescentia firmavit. Hoc tantùm in Mathematicarum scientiarum commendationem vobis afferre sufficiat. Nunc quod in hoc opere praestiterim breviter exponam.

Primò ex sola quantitatis consideratione principia quædam deduxi, numero pauca, & valdè simplicia, ex quorum nihilominus cognitione, atque comprehensione omnium, quæ tam in Arithmetica, quàm in Geometria docentur, generalis scientia comparatur. 2°, Proportionum naturam explicui, & quosdam inventionis fontes aperui, ex quibus propositiones omnes ad Proportionum materiam spectantes à quovis facillimè deduci possunt. 3°, nova quædam Elementa Geometrica constitui, ad quatuor propositiones commodissimè redacta, & ita universalia, ut inde geometricum robur accipiat quidquid in Mathematicis geometricam desiderat solutionem. His peractis ad analysim transivi, & ante omnia Compositionis, atque Resolutionis metho-

dum ita perſpicuè tradidi, & analyticum artificium tam clare oſtendi ut eruditionis amantes, & adhuc in primo Matheſeos limine hærentes nemine alio docente his veræ Philoſophiæ clavibus uti, & apertis ſcientiarum theſauris ampliſsimas animi divitias ſibi comparare queant. Vltimo novis repertis quamplurimis, quæ hic recenſere nimis longum eſſet, ſubtiliſſimam analyſeos artem promovi.

Hæc quamvis minime levia majoris operis tantùm præludia ſunt, aut ſpecimina, de quo ut hic aliquid dicam, partem illam artis analyticæ abſolvo, quæ noſcendæ per æquationis medium veritati inſumitur, nam æquationum naturam, atque generationes novâ perveſtigatione proſequor, deinde certas Mathematicorum argumentorum ſedes affero, & topica

quædam

quædam alia detego, unde magna æquationum ad unicum problema solvendum copia parari possit, quod adhuc à nemine factum est, & de quæstionum natura atque differentiis fusè differo, quem locum præ cunctis necessarium ab omnibus prætermissum esse miror; postea methodum trado quâ cuncta per analysim inventu possibilia reperiri possunt, hanc methodum sequitur alia multo admirabilior, per quam cujuslibet æquationis terminos omnes intermedios aufferre licet, & quidem duos, aut tres per ea quæ huc usque reperta sunt, verùm ad plures quàm tres aufferendos necesse est ut nova reperta dentur, quæ generalis hujus methodi usum latiùs extendant. Scio hoc paradoxum multis visum iri, qui sibi persuadent omnia quæ humani ingenii viribus

acquiri possunt jam ab iis, qui de analysi nuper scripserunt inventa esse, aut facilè ex eorum principiis deduci posse; Ideò plura suo tempore dicenda hic non addam, quæ illorum hominum qui hujusmodi erroris affines sunt, fidem magis adhuc superarent, ne ipsos in limine offendam; Hæc tamen apud me parata habeo, (nollem enim vanis promissis CELSITVDINVM VESTRARVM *aures replere,) sed quoniam universalia, quæ primùm inventu difficilia sunt, postea particularibus exemplis, tam ex Arihtmeticorum quàm Geometricorum fonte petitis ostendere, res est plena laboris, idcircò ultimam manum tanto operi imponere nondum licuit.*

Restat Analyseos pars altera, quæ nonnullas quæstiones spectat, pro

quibus solvendis impossibile, aut admodum difficile est ad aliquam æquationem pervenire, quales sunt ferè omnes, quæ planorum, vel solidorum curvilineorum quadraturas, aut cubationes investigare proponunt, nam in hujuscemodi quæstionibus media desunt, aut saltem difficillimè apparent ad instituendam curvi cum recto comparationem, & quamvis, verbi gratiâ, pro circuli quadratione lineam quamdam curvam imaginati sint Veteres, quam ab officio quadratricem dixere, verumtamen ex hujus lineæ generatione, atque constitutione nulla æquatio elici potest ad propositam circuli quadrationem arguendam; adeò ut inveniendæ sint methodi valdè particulares pro consimilium quæstionum solutione, ut paucis abhinc annis

apud vos fecit Huraetius, Hollando-Batavus, qui primus omnium curvarum linearum in rectas transmutationem edocuit; sed Dominus Huddenius idem Hollando-Batavus, acerrimi vir ingenii, & Analysta peritissimus hanc nodosam de curvilineis materiam ita explanavit, quamquam illa quæ super ea re acutissimè scripsit adhuc, ni fallor, in scriniis lateant, ut nihil sit ab ista parte, quod post doctos tanti viri labores amplius desiderari videatur: Et sic absolutis duabus quas nominavi Analyseos partibus nulla supererit quæstio quæ per hanc artem via omnium simplicissima, sicut Deo juvante ostendam, resolvi nequeat.

Interim Specimina hæc, CELSI, AC PRÆPOTENTES DOMINI ORDINES, *qualiacumque*

ſint eo quo ſoletis animo benigni accipere, & quaſi in votiva tabella perpetuam Authoris erga Vos obſervantiam, & æternum obſequium intueri dignemini obnixè rogat

CELSITUDINUM VESTRARUM

Humillimus Servus
FRANCISCUS DULAURENS, GALLUS.

Pariſiis, die primâ Ianuarii, An. 1667.



INDEX CAPITUM HUJUS OPERIS.

IN LIBRO PRIMO.

CAPUT I. DE *quantitate, ejusque speciebus, & diversis proprietatibus,* 1
CAP. II. *De Proportionibus,* 20
CAP. III. *De precipuis symptomatibus, quæ à quantitatum multiplicationibus, atque divisionibus proveniunt, sive de precipuis æquationes instituendi modis,* 41
CAP. IV. *De Geometricis Definitionibus,* 58
CAP. V. *De Elementis Geometricis,* 89

IN LIBRO SECUNDO.

CAPUT I. DE *Methodo Compositionis, atque Resolutionis,* 149
CAP. II. *De solutione Æquationum duas dimensiones habentium,* 166
CAP. III. *De Æquationibus trium dimensionum, earumque solutione,* 178
CAP. IV. *De solutione quadrimensarum æquationum per earum depressionem ad tertium gradum,* 214

CAP. V. *De natura Æquationum plures quàm quatuor dimensiones habentium, & de illarum solutione,* 222

IN ADDITAMENTIS.

NOVA *Methodus extrahendi radicem subæquibimensam ex quibuscumque binomiis,* 237

Methodus universalis, & facillima extrahendi radices imperatas ex quibuscumque binomiis, radicem binomiam, & planam habentibus, 240

Methodus universalis aufferendi unumquemlibet terminum, primo excepto, è quavis æquatione proposita, 247

Solutio Problematis à D. Wallisio totius Europæ Mathematicis propositi, sed priùs ad generale revocati. Anno 1650, *eodem tempore quo propositum est,* 249



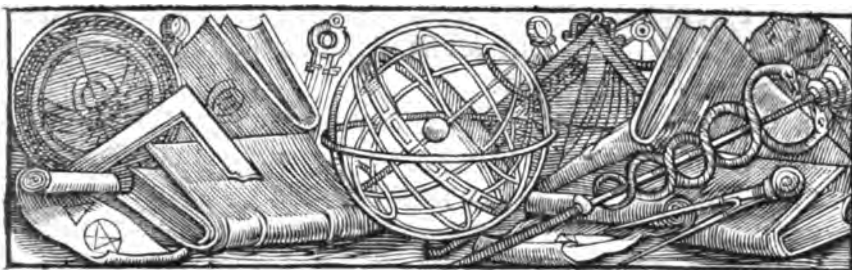
NOTÆ; SEU SYMBOLA

Quibus in ſequentibus utor.

Π æquale ut *a* Π *b*, id eſt *a* æquatur *b*.
⊐ majus ut *a* ⊐ *b*, id eſt *a* major *b*.
⊏ minus ut *a* ⊏ *b*, id eſt *a* minor *b*.
+ plus ut *a* + *b*, id eſt *a* plus *b*.
& *a* ± *b*, id eſt *a* plus vel minus *b*.
— minus ut *a* — *b*, id eſt *a* minus *b*.
× multiplicationis nota ut *a* in *b*, id eſt litera *a* multiplicata, vel multiplicanda in *b*.
:: proportio, ſive ratio æqualis, ut *a*. *b* :: *c*. *d*. Id eſt ut *a* ad *b*, ſic *c* ad *d*.
÷ continuè proportionales ut *a*. *b*. *c* ÷, id eſt ut *a* ad *b*, ſic *b* ad *c*.
√, radix, √2 radix 2æ poteſtatis, √3 radix 3æ poteſtatis; & cætera.
⊥ perpendiculum.
= parallelæ ut *a* = *b*, id eſt *a* parallela eſt ad *b*.
△ triangulum.
∠ angulus.
□ æquibimenſum ſive quadratum.
▭ bimenſum ſive rectangulum.
|3| æquitrimenſum, ſive cubus, |4| æquiquadrimenſum, &c.
|3|do cubando, vel ter multiplicando, |4|do quater multiplicando, &c.



SPECIMI-



SPECIMINUM MATHEMATICORUM

LIBER PRIMUS.

CAPUT PRIMUM.

De quantitate ejuſque ſpeciebus, & diverſis proprietatibus.

QUANTUM vocamus id omne, quod ex- I.
tenſionem, vel diſtinctionem in ſe reci-
pit, eadem videlicet quantitatis deno-
minatione duabus his rerum affectioni-
bus ſignificandis accommodata.
Maximè verò differt extenſum à rei di- III.
ſtinctæ natura; extenſio enim rem innuit undique ſibi cohærentem, & unâ velut continuitate productam, qualis eſt linea, planumq; & omnia hujus mundi corpora, quæ propriè magnitudines appellantur: qualis eſt etiam locus, tempus, motus, pondus, potentia, & quidquid adunatum quodammodo corporibus invenitur; contrà verò diſtinctio rem compoſitam arguit, vel potiùs plurium rerum aggregatum disjunctis inter ſe partibus compoſitum, ut eſt populus, acervus, & quidquid eorum, quorum partes propriis extremitatibus terminantur, & ab alterius fine diſcretæ ſunt, atque hujuſmodi rerum congeries peculiari nomine multitudo dicitur. Hinc duas quantitatis ſpecies inter ſe valdè diſſimiles intueri licet, quarum prima natu-

ram extensionis respiciens continua vocatur; altera verò distinctionis essentiam declarans, ideò discretæ, sive separatæ nomen obtinuit.

III. Præter innatum, assignatumque harum quantitatum discrimen, magnam etiam inter earum subjecta disparitatem natura proposuit; continua namque quantitas ad res extensas tantummodò pertinet, easque solas afficit, nec in ullis aliis unquam reperitur; separata verò præter extensorum genus, quod totum ei subjicitur, etiam in rebus omni quantitate destitutis locum habet, dicimus enim duo puncta, tria momenta, decem spiritus, &c. Quamobrem discreta quantitas non ob subjectum suum, quod aliquando quantitatis expers est talis denominatur, sed hoc ideò nomine gaudet quod plura subjecta simul respiciat, in qua pluralitate semper inest distinctio, quamvis in unoquoque subjectorum nec ulla distinctio sit, nec extensio. In eo itaque dissimilitudo sita est quod discreta quantitas omnia rerum genera pervadit, eisque se accommodat; continua verò contractiore significatu extensi limites non egreditur.

IV. Hîc obiter notandum occurrit æquivocam esse magnitudinis appellationem, & utrique quantitatis speciei convenire, id est tam continuam, quam discretam quantitatem magnitudines appellari posse. Dum enim magnum quid nominamus ad nominatæ rei molem, sive quantitatem tantummodò respicimus, adeò ut magnitudinis significatio, nihil aliud quam rei molem, determinatamve magnitudinem involvat: quare cùm numeri suas etiam determinatas habeant quantitates magni propterea dicendi erunt. Usus tamen obtinuit ut magnitudinis nomen præcipuâ quâdam ratione quantitati continuæ tribueretur, nec immerito quidem jure, quoniam magnitudo, quæ quantitatem rebus inexistentem significat, illam potius continuam, sibique cohærentem denotat, quam partibus disjunctis inter se copulatam; quicquid enim simplex est quovis composito, vel partium aggregato facilius apprehenditur; unde cùm quantitatis continuæ natura indivisam habeat unitamque substantiam, æquiùs illa pro-

pter simplicitatem suam, facilemque comprehensionem magnitudo vocabitur, quam composita atque divisa numerorum natura, quæ non simplicem, sed aggregatam ex pluribus quantitatibus magnitudinem repræsentat. V.

Quantitati verò discretæ, nimirum multitudini præcipuè convenit divisio; dividi enim nihil aliud est quàm separari, sive distingui; multitudinis autem naturam in sola distinctione positam esse suprà vidimus. Quoniam verò magnitudo partium suarum distinctionem sustinere valet, sicut & multitudo, propterea divisibilem illam etiam agnoscere jubemur.

VI. Distinctio verò à divisione in eo differt, quod distinctio quamcumque pluralitatem exprimit; divisio verò eam solam designat, quæ à rerum, ut ita dicam, separabilitate exoritur. Unde si distinctio pro quodam genere accipiatur, erit divisio pro ejus specie consequenter assumenda.

VII. Neque verò actualis tantummodò divisio multitudini concedenda, verumetiam potentialis tribuenda videtur; non enim unquam ita divisa est, ut pluribus aliis modis secari non possit; veluti numerus duodenarius non ita divisus est in partes suas duodecimas, ut in tertias, quartas, sextas, & adhuc alias quasdam sine nomine dividi nequeat. Sic igitur divisibilitas communis utrique quantitatis speciei proprietas est, cum hac nihilominus differentia, ut quam actualem, virtualemque divisionem multitudo sibi principaliter assumit, eandem potentialem tantùm, derivatamque magnitudo participet.

VIII. Ex hoc discrimine consequitur cunctam vim multitudinis, quæ certo, determinatoque partium numero conflatur modum in divisione recipere, sive divisionis terminos habere, ultra quos sectio ampliùs procedere nequit; magnitudinem verò, quæ nullis inter se distinctis partibus coagmentatur divisionem in infinitum admittere, infinitissimas sui corporis suscipiendo sectiones. Nam quando multitudo dividitur, quia in illa partium numerus determinatur, necesse est etiam divisionis modos in eadem determinari; & consequenter potentiæ divisivæ vim, quæ

tunc ad certos illos modos contrahitur, alligaturque, aliquando exhauriri, & tandem omninò sisti, quando videlicet ad ultimam usque divisionem perventum erit. At in magnitudinis divisione idem accidere nequaquam potest, potentia enim divisiva numero partium, quæ nullæ hîc adsunt determinatæ non limitatur, nec ullâ aliâ ratione impeditur; unde cùm libera maneat subjectum suum in quotcumque partes resolvendi virtutem suam in infinitum extendit, potentia enim quæ non restringitur vaga est. Itaque manifestum est multitudinis divisibilitatem longè aliam esse ab ea divisibilitate quæ in magnitudine reperitur: hæc enim infinitæ cùm sit virtutis nullum unquam secandis corporibus finem imponit; altera verò limitatam habens potentiam circa præfinitas quasdam divisionis rationes solummodo versatur, & determinatis certarum partium spatiis inclusa coërcetur.

IX. Partes autem in continuo, sicut superiùs assumptum est, nullas actu reperiri ipsamet extensionis vox satis apertè declarat, illa enim ubique continuatam, hoc est nullis locis interruptam substantiæ unitatem & meram ad quaslibet divisiones capacitatem significat, quam continui sic unitam, cohærentemque substantiam partium præsentia profectò corrumperet, & puram illam ad quaslibet divisiones capacitatem omninò destrueret.

X. Omnis præterea finita atque determinata quantitas, (de qua sola, non de infinita, quæ sub scientiam non cadit sermonem instituimus,) sive continua sit, sive discretam habeat naturam, per infinitos incrementorum gradus augeri, novisque semper accessionibus major fieri potest, itaut nullus augmentationi finis modusve existat. Illimitata hæc quantitatis (si dicere licet) augmentabilitas infinitam continui, sive extensi divisibilitatem ex adverso respicit, sicut enim extensæ quantitatis continuitas dissolvi, & in partes secari potest; ita etiam eandem continuitatem per oppositam potentiam ad naturæ suæ integritatem restitui posse convenit. Quare cùm infinitos dissolutionum gradus dividens potentia pertranseat, ita infinitos conjunctionum nexus componens potentia de-

bet ordiri, ut cuilibet sectioni sua junctura respondente quod dissolutione solutum fuerat per compositionis opus ad cohærentiam revocetur, & in pristinam compagem redeat. Est igitur conjunctivæ cujusdam potentiæ vis infinita sicut & disjunctivæ; & sicut continuum in infinitum dividi potest, ita per contrariæ potentiæ virtutem in infinitum augeri valet. Quoniam verò continui divisibilitas infinitam partium multitudinem involvit, certè numerus qui ad quamcumque pluralitatem exprimendam naturâ suâ idoneus est illa dividentis potentiæ infinitate afficietur, unde numerus quoque hac ratione in infinitum augmentabilis evadit. Nunc si magnitudinem prout dividi potest consideres; numerum verò quatenus semper augeri valet spectes possibilia magnitudinis decrementa possibilibus numerorum augmentis ex opposito sibi respondere invenies. Sicut enim determinata magnitudo à finita, & unitatis locum tenente inchoans quantitate per innumeras, ac nusquam propter infinitam divisibilitatis suæ potentiam desituras corporis sui sectiones gradatim decrescit; ita etiam multitudo ab unitate exordium sumens per continuas unitatis appositiones, veluti per aliquos gradus in immensam, indefinitamque molem paulatim assurgit. Per has itaque dictarum quantitatis specierum oppositas affectiones latitantem in earum naturis contrarietatem quandam agnoscere licet; numerorum enim crementum ab unitate incipiens ex diminutione magnitudinis per unitatem significatæ proficiscitur, contra verò magnitudinis augmentatio, sive continui restitutio decrescente partium multitudine paulatim resurgit, donec tandem resolutâ numerorum compage unitas occurrat, quæ & pristinam dictæ magnitudinis continuitatem restituit, & quod illi per numerorum generationes ademptum erat reponit.

XI. A divisione porrò rerumque distinctione plus, minus, æqualitas, inæqualitas, atque similia primùm orta sunt. Propositis enim pluribus inter se distinctis, atque divisis quantitatibus factum est ut una alteri collata sit secundum molem, summamque sui corporis, & quæ reperta

est aliam superare, vel excedere, sive quod idem est plus molis habere, ea major est dicta, quæ verò ab alia superari, vel deficere, sive quod idem est minus habere molis inventa est, ea minoris nomen obtinuit: at quando per varias comparationes tandem accidit ut quædam quantitates oblatæ fuerint, quæ tales erant inter se ut sibi comparatas nec excederent, nec vicissim ab eis excederentur hujusmodi quantitates æquales appellare placuit.

XII. Satis patet has quantitatis proprietates eo quo dictum est modo generari debuisse; nihil enim æquale, majus, minusve suimet ipsius respectu dicitur, sed tantum aliorum collatione tale denominatur. Unde sequitur nullam quantitatem solitariè sumptam talium caracterum proprietate esse affectam, sed tantummodo plures simul affici posse; & quoniam pluralitas distinctionem suppositorum involvit non est æqualitatis & inæqualitatis principium aliunde quam ab ipsamet divisione petendum.

XIII. Ex hac sic explicata æqualitatis inæqualitatisque generatione, earum natura ritè cognosci potest. Quoniam enim ad æqualitatis, inæqualitatisque constitutionem talis conditio requiritur ut plures quantitates inter se conferantur, manifestum est æqualitatem, inæqualitatemque certas esse quantitatum inter se relationes, atque habitudines. Deinde quia sola quantitatum inter se comparatio non sufficit ut æquales, inæqualesve dicantur, sed inter se secundùm corporis sui molem conferri debent, sequitur illas quantitatum habitudines naturam habere in quantitatis æstimatione fundatam. Quapropter æqualitatem, inæqualitatemque certas esse quantitatum inter se juxta corporis molem, amplitudinemve comparatarum habitudines colligere licet.

XIV. Perspicuum est supradictas quanti passiones inter solas ejusdem generis quantitates reperiri posse, veluti inter duos numeros, duasve lineas, non verò inter numerum atque lineam; sola enim quæ sunt unius generis inter se comparabilia sunt, æqualitatem autem, & inæqualitatem certas esse quantitatum inter se comparationes suprà vidimus.

Æqualitas medium inter majoritatem, ac minoritatem locum obtinens immutabilem eapropter essentiam vimque sortita est, atque in alias naturaliter manet indivisa species; medium enim stabilitatis, atque constantiæ sedes uno tantum modo se habet, nec ulli potest obnoxium esse mutationi. Contra verò quæ suprà, infraque posita sunt ut majoritas, ac minoritas perpetuò mutantur, & in vertibilem inconstantiam transeunt. Propter hanc æqualitatis uniformitatem, propriamque moderationem ea pro regularitatis fundamento adhibetur, ad cujus mensuram omnes majoritatis, ac minoritatis species ab ea deflectentes, & modò propiùs, modò remotiùs ad eam accedentes examinantur. In quovis enim rerum genere quod ordinatum est, tanquam fixum quid supponi debet, cujus comparatione aliarum irregularitates dignosci queant, & ad artem revocari. Id etiam causæ est cur majoritas, ac minoritas sub communi inæqualitatis nomine comprehendantur, sic enim omnis earum anomalia ad unam eandemque methodum per communem illam denominationem redacta simplicius aliquo modo tractatur, ac facilius postea ad æqualitatis naturam legesque quoad fieri potest ordinatur. XV.

Insuper æqualitas nec æqualium additione, detractioneve ullo pacto alteratur, nec communi per æqualia multiplicatione vel divisione mutatur; hujus rei causa est invariabilis ipsius natura, & constans uniformitas; quidquid enim circa quantitates æquales æqualiter operaberis nullam ex hujusmodi operatione diversitatem, & deformitatem æqualitas recipit, manente semper eadem, immutabili nimirum existente in omnibus æqualitate; adde quod æqualitas quædam identitatis species est, unde æquales quantitates æqualium, sive earumdem quantitatum, & similium operationum identitate receptâ æquales postea manere necesse est; æqualitas autem per sibi contrariæ inæqualitatis accessionem omninò destruitur. XVI.

Inæqualitatis verò duo, ut jam vidimus, genera reperiuntur, majoritas nimirum atque minoritas. Utrumque ex utraque medii, videlicet æqualitatis parte, primum XVII.

excedendo, ſecundum deficiendo profluens ab ea per indefinita ſpatia recedit. Facilè tamen ad æqualitatem ambo revocantur, duabus enim propoſitis inæqualibus quantitatibus ipſas æquales inter ſe efficies ſi earum differentiam acceperis, & hanc minori quantitati addideris, vel eandem à majore ſuſtuleris, per hanc enim differentiæ additionem, detractionemque quantitatum inæqualium exceſſus, atque defectus corrigitur, & inæqualitas ad æqualitatem revocatur.

XVIII. Tanta eſt æqualitatis moderatio, ut eas non ſolùm quas afficit quantitates augeat, minuat, multiplicet, atque dividat nullâ factâ in ipſis quoad æqualitatem mutatione, ſed etiam ut quantitates ab inæqualitate affectas per ſimiles operationes tractando intactam in ipſis inæqualitatis notam relinquat. Hoc facilè colligitur ex ſuperiùs explicata inæqualitatis ad æqualitatem revocandi ratione; ut enim inæquales quantitates ad æqualitatem perveniant neceſſe eſt addi minori, vel à majore detrahi ipſarum quantitatum differentiam, ſed per communem æqualium additionem, vel ſubductionem neque minor quantitas majoris differentia augetur, neque major eadem differentia contrahitur, cùm idem utrique inæqualitatis parti adjiciatur, aut dematur: ergo ſive æqualium additione, aut multiplicatione, ſive æqualium detractione, vel diviſione inæquales quantitates augeantur, minuanturve, nunquam hâc ratione in æqualitatem incident, hoc eſt manebit ſemper in ipſis inæqualitas: Sic ergo æqualitas ſeipſam primò, deinde inæqualitatem per quælibet augmenta, vel decrementa modo æqualia deducere valet, nullo aut æqualitatis, aut inæqualitatis detrimento.

XIX. Quando inæqualitas ut à perfectione declinans proprietas conſideratur, æqualitatem ſemper in conceptu ſuo involvit, & tunc inæqualium quantitatum una major, ſive excedens; altera minor, ſive deficiens ſimpliciter dicitur: hæ deficientis & excedentis denominationes ſatis ſuperque oſtendunt æqualitatem hìc neceſſariò ſupponi; exceſſûs enim atque defectûs nomina aberrationes à medio

à medio termino, hoc est ab æquali significant. Atque hoc sensu utrumq; inæqualitatis genus à fixa æqualitatis margine, tanquã à radice quadam pronascens vagis erroribus hinc inde digreditur, in varias se se diffundendo species, quarùm una quæque infinitis modis variari potest nullo irregularitatis fine existente. Nam quoniam inæqualitatis vox nihil aliud quàm certas ab ęqualitate deflexiones, sive distantias hoc in loco significat, consequens omninò est ut tot diversitates inæqualitas induat quot modi reperientur variandæ istius distantiæ; illa autem distantia, saltem in quantitate continua, infinitarum capax est mutationum, nam in infinitum augeri, atque minui, idest alia semper, atque alia valet evadere: restat ergo ut innumeras inæqualitatum diversitates magnitudinis natura sustineat. Quando verò inæqualitas in se cõsideratur, hoc est quando inęqualitatis termini inter se secundum quantitatis molem atque capicitatem comparantur, nullo habito ad imperfectam inęqualitatis naturam respectu, alia tunc illi termini nomina sortiuntur; nam qui major est, sive qui alium continet minoris respectu totum dicitur; qui verò minor existit, sive qui ab alio continetur majoris comparatione pars nominatur, unde licet hîc definire totum dicendo id esse quantitatem majorem ad minorem, & homogeneam collatam; partem verò minorem esse quantitatem ad majorem, & homogeneam comparatam. Atque ex his definitionibus manifestum fit totum majus esse sua parte. XX.

Quantitas aliqua solitariè sumpta sicut neque major, neque minor est, ita neque totum, neque pars dicitur, sed ut minor est cujusdam majoris comparatione minor, sic pars est cujusdam totius comparatione pars. Itaque totum & pars relatione quadam inter se affecta sunt.

Quando pars aliquoties sumpta totum suum præcisè constituit, idest quando aliquoties sumpta toti suo fit æqualis, tunc aliquota dicitur, quasi certa, atque determinata, notabili nimirum ab omnibus alijs discrimine evidens, & naturæ suæ claritate se se intellectui plenissimè, ac sine ambage manifestans, ob eam causam perspicua difinitione facilè comprehenditur, ac voce maximè pro- XXII.

pria, & absoluta per se nominatur: Atque hæc pars toti suo commensurabilis est, illa enim est velut mensura, quæ seipsam primò, deinde aliquoties repetita, vel sibi ipsi addita totum suum mensurat, quæ cùm ipsummet etiam hac ratione adæquet, necesse est & mensuram, & commensurabilitatem in æqualitate fundari.

XXII. Pars autem sibi ipsi addita quoties opus est ad totum suum coæquandum, tunc à suo toto non differt, nisi quod totum primariò acceptum tanquam indivisum quid ponitur, alterum verò huic æquale, quod aggregatis partibus componitur, ut divisum in se consideratur.

XXIII. Major quantitas multiplex vocatur alterius minoris quando minorem illam aliquoties præcisè continet, sive quando ab illa minori quantitate præcisè mensuratur. Itaque multiplex totum quoddam est aliquotis, & æqualibus inter se partibus compositum, & ad ipsas relativum.

XXIV. Quando verò pars, aut quantumlibet exigua hujus partis portio aliquoties sumpta toti suo æqualis fieri nequit, sed vel ipsum semper excedit, vel ab eo semper deficit, tunc aliquanta vocatur, hoc est quantitatis majoris portionem referens, certam illam quidem, sed quæ parùm aperto ab aliis discrimine se se noscendam præbet, ideoque naturæ suæ obscuritate difficilem habet, ut ita dicam, comprehensibilitatem: Hinc clara per se inexplicabilis est oratione, sed per impropriam relationis vocem confusè tantum effabilis, atque hæc pars toti suo incommensurabilis est; illa enim velut mensura sumi non potest, cùm sibi ipsi quocumque modo addita toti suo coæquari numquam valeat. Itaque tota incommensurabilitas in æqualitate fundatur.

XXV. Omnis quidem commensurabilitas possibilem, incommensurabilitas verò impossibilem æqualitatem, vel potius æquationem ut oppositis facultatibus, ita contrariis vocibus exprimunt; unde has quantitatis affectiones naturas habere diximus in æqualitatis, & in inæqualitatis basi fundatas; verùm illarum essentiæ ab aliis quàm ab æqualitatis, & inæqualitatis fontibus profluunt. Hos fon-

res investigare, & ab eis commensurabilitatis, & incommensurabilitatis causas omnes deducere facillimum est: nam qui numerorum naturam attentè considerabit (de numeris propriè dictis, vel effabilibus absolutisve hîc tantummodo loquor) is in symmetriæ, sive commensurabilitatis cognitionem, atque comprehensionem nullo negotio deveniet; qui verò magnitudinis essentiam, atque proprietates scrutabitur, illum incommensurabilitatis origo non latebit: Sicut enim ex naturali numerorum structura commensurabilitas exsurgit, ita ex naturali magnitudinis constitutione incommensurabilitas exoritur, quod manifestum fit hac ratione. Omnis numerus juxta possibiles quæ sunt in eo sectiones divisus tandem relinquit unitatem, sive particulam sui minimam, quæ sectionem non admittit, docuimus enim omnem numerum divisibilitatis suæ terminos habere, ultra quos sectio non procedit; unitates autem omnes ideò sunt inter se æquales, quod numerorum minimæ sint particulæ: (minima enim homogenea ob id solùm quod minima sint inter se æquari necesse est, ut rationis lumen ostendit;) dividitur ergo quilibet numerus effabilis in particulas æquales, quæ quidem aliquoties sumptæ divisum quemlibet numerum restituunt, sive adæquant: Unitas igitur communis est omnium numerorum mensura; verùm in magnitudinibus communis mensura sic inveniri nequit, mensura enim ut ejus natura declarat debet esse certa, atque determinata: Atqui omnis magnitudo in infinitum divisa non relinquit particulam, quæ propterea quod parva sit secari non possit, quin illa in infinitum secta infinitas efficit particulas, quarum singulæ in infinitas minores sectiles sunt, ut res finem habitura non sit, si quis minutias omnes consectari velit. Nunquam igitur ex infinita magnitudinis divisione ad aliquam particulam devenietur, quæ minima dici debeat, nec propterea certa determinataque dabitur in magnitudine particula, quæ pro communi omnium magnitudinum mensura sumi queat, nam si talis daretur eam minimam esse necesse foret, quandoquidem in minimo solùm divisio sistitur, atque determinatur. Vides ergo que-

modò limitata numerorum effabilium divisio symmetriam producat, & cur in infinitũ continuata magnitudinis sectio assymmetriæ, sive incommensurabilitatis causa dicatur.

XXVI. Atque hinc primò colligere licet numeros omnes invicem esse commensurabiles, cùm eos mensuret, & adæquet aliquoties repetita unitas; magnitudines verò quarumlibet divisionum capaces cùm sint, hâc de causa quandoque inter se commensurabiles existere, quando videlicet numericas divisionum species assumunt, sive cùm aliquoties iterata unius per alteram, sive dividui per divisorem; & divisoris per reliquum sectione tandem oritur particula, quæ ambabus quantitatibus aliquota est, vel quæ, sicut jam vidimus, aliquoties sumpta ambas quantitates restaurat; aliquando verò incommensurabiles esse, quando scilicet numericas divisionum species non admittunt, sive quum in infinitum continuata unius per alteram, sive dividui per divisorem, & divisoris per reliquum sectione producta particula semper ambabus quantitatibus, vel saltem alterutri ex illis, aliquanta manet, hoc est sicut ostendimus quæ aliquoties sumpta ambas quantitates minimè reponit, sed eas, vel alterutram saltem semper excedit, vel ab eis, sive ab alterutra saltem semper deficit.

XXVII. Præterea quoniam duas quascumque propositas quantitates, si juxta mensuram inter se comparentur, vel commensurabiles, vel incommensurabiles existere necesse est; totiusque commensurationis naturam in sola quantitatum æquisectione ab eodem divisore facta consistere docuimus; evidens profectò est partes illas, in quas tunc divisæ quantitates propter earum symmetriam dispescuntur, unitatum naturam induere, sive per unitates, aut per idem unitatum aggregatum repræsentari debere; sola enim hæc numerorum nomina æquisectionum partibus exprimendis idonea sunt, quod cùm ipsum numericum sit, ideò symmetrarum quantitatum habitudines omnes numericas esse disertè pronuntiamus. Sunt igitur commensurabiles quantitates qualescumque illæ sint ut numerus effabilis sive absolutus ad numerum effabilem, sive absolutum; & si quælibet quantitates eam inter se relationem habent

quam numerus absolutus ad numerum absolutum, ipsæ erunt invicem commensurabiles.

Ampliùs manifestum est nullam inter commeusurabiles magnitudines proportionem existere posse, quam non eandem in numeris quoque reperire liceat, neque vicissim in discretis ullam dari quam non in continuis exhibere valeas; infinitos enim divisionum modos, nedum determinatos omnes, qui in numerorum ordine reperiuntur magnitudinis natura complexa est. Nihil igitur de numerorum symmetria demonstrari potest quin idem, & per easdem rationes in quolibet magnitudinum genere ostendatur. Quod autem eorum quæ ad incommensurabilitatem spectant nihil quicquam numeris conveniat jam est antè sancitum, quando numeros omnes invicem commensurabiles esse conclusum est. Itaque concepta de commensurabilitate problemata vel theoremata, & ad numeros absolutos & ad magnitudines ordinata esse censeantur, verùm ad assymmetriam pertinentes propositiones solis magnitudinibus, & surdis eas exprimentibus congruæ sunt. XXVIII.

Utrum autem fortuitò oblata sive problemata, sive theoremata in quibus commensurabilitas, vel incommensurabilitas ex ipsis terminis non statim apparet geometrica solùm, an verò numerica simul sint, idest utrum solis magnitudinibus, an verò magnitudinibus, & numeris etiam accomodari possint hâc ratione dignosces; nam si ad illorum constructionem arbitraria tantùm requiratur quantitatum divisio, vel multiplicatio, indubitabile signum est ipsa de utraque quantitatum specie simul exponi, quandoquidem quantitates omnes naturâ suâ divisibiles sunt, & ex apposita conditione liberum manet illas quocumque modo dividere. Unde sequitur hujusmodi problemata quantitates in genere sumptas respicientia generaliter enuntianda esse: Si verò per appositam in quæstione conditionem determinatæ vel multiplicationes, vel divisiones necessariæ sint ad quæsitum efficiendum, tunc generales commensurabilitatis, vel incommensurabilitatis regulæ, sive canones docebunt XXIX.

utrum numerorum essentiæ talibus multiplicationibus, aut divisionibus ferendis idoneæ sint. Atque sic agnita ejus quod proponitur universalitate, vel particularitate, universalis etiam, aut particularis efformanda conclusio est.

XXX. Optimam verò tum commensurabilitatis, tum incommensurabilitatis investigandæ methodum nobis tradit alterna quantitatum divisio, quæ si divisore dividuum suum exactè numquam dividente, vel numquam ita secante quin aliquid residui pro ulteriori divisione supersit perpetua fiat, certissimum erit latentis inter divisas quantitates incommensurabilitatis indicium. Si verò ad perfectam, exactamque dividui æquisectionem pervenire, atque sic deficiente residuo divisionem sisti contingat, evidens erit commensurabilitatis inter divisas quantitates existentis argumentum. Quapropter ad evincendam duarum quantitatum incommensurationem nihil aliud ostendi debet quàm eas sic ad invicem esse comparatas, ut ex infinitis particulis, ab innumeris ipsarum se se reciprocè dividentium sectionibus oriundis ne minima quidem unius portio alterius quantumlibet exiguæ portioni æqualis occurrere possit, sicut ad arguendam aliarum commensurationem probavisse sufficiet talem inter eas reperiri necessitudinem ut illarum reciproca divisio paululùm progressa propter exsurgentem dividui æquisectionem desinere cogatur, qualibet enim operatio ad æqualitatem perducta in unitatem, atque identitatem incidit, ita ut illam ulterius provehi repugnet.

XXXI. Atque hæc pauca de symmetria, & assymmetria prælibasse sufficiat, nunc cæteras quãtitatis in genere sumptæ proprietates prosequamur. Quando igitur binas inter quantitates existens æqualitas, aut inæqualitas latissimè sumpta vocabulorũ significatiõne consideratur, sive quando non determinatur quænam, & quanta sit illa vel æqualitas, vel inæqualitas, sed vaga tantùm, & illimitata concipitur, tunc, ut suprà conclusum est, inter propositas quantitates secundum quantitatis molem comparatas simplex æqualitatis vel inæqualitatis emergit habitudo; verùm si hujus

habitudinis significatio restringatur, & æqualitatis aut inæqualitatis genus ad particularem aliquam speciem revocetur, atque determinetur, quamvis æqualitas nullam propriè loquendo admittat varietatem, tunc determinatus ille binarum quantitatum respectus non jam simplex æqualitatis, aut inæqualitatis habitudo, sed ratio, dicitur; unde hîc rationem, vel proportionem definire licet dicendo eam esse determinatam quandam æqualitatis, inæqualitatisve speciem.

Quoniam autem duarum quantitatum differentia noscitur per minoris à majore ablationem, ac minor à majore vel semel, vel quoties id fieri potest auferri valet, ex his duobus diversis quantitatem à quantitate detrahendi modis, duæ diversæ nascuntur rationum vel proportionum species. Prima videlicet quæ ex simplici subtractione, hoc est quantitatem à quantitate semel auferendo generatur, numeralis sive arithmetica ratio, proportiove dicitur. Secunda verò, quæ à divisione, hoc est quantitatem à quantitate quoties id fieri potest auferendo oritur, ratio sive proportio geometrica nominatur, & orta ex unius quantitatis per aliam divisione quantitas, rationis quotus, vel quantitas, sive etiam quia quotus ille quantitates, ex quarum divisione provenit in certa æqualitatis, aut inæqualitatis specie constituit, rationis denominator, atque species vocari consuevit. XXXII.

Jam verò cùm duplex sit inæqualitas, excessus nimirum, atque defectus, idcircò duarum inæqualium quantitatum comparatio dupliciter institui potest. Quando major quantitas minori comparatur ipsarum ratio excessiva dicatur, quoniam tunc comparatio fit secundum excessum. Quando verò minor majori confertur, ipsarum ratio defectiva vocetur propter factam secundum defectum comparationem. Quantitates autem sic comparatæ rationis termini vocantur, quorum primus, à quo nempe ratio incipit, antecedens; secundus verò, in quo desinit, consequens nominatur. XXXIII.

Maxima autem distinctio facienda est inter rationis terminos, & ipsam rationem. Nam rationis termini in XXXIV.

infinitum augeri possunt, manente semper eadem ratione; ut suo loco probabitur.

XXXV. Jam quando duæ similes, sive æquales rationes inter se comparantur, hæc similium rationum comparatio, analogismus, sive adhuc proportio dicitur, ubi videre est Mathematicos proportionis nomine vulgò abuti solitos dum per illud rationem etiam significare volunt, quando autem duæ similes rationes inter se comparatæ numerales sunt, sive arithmeticæ, tunc arithmetica proportio nuncupatur, gormetrica verò dicitur dum comparatæ rationes geometricæ sunt. Rem illustremus exemplis: Sunto duæ quantitates, verbi gratiâ, duo sequentes numeri 12. & 3. quos inter se confere velimus. Primò semel detrahamus minorem 3. ex majore 12. dico residuum numerum 9. qui post subductionis opus remanet, esse excessum, sive differentiam majoris numeri 12. à numero 3. atque excessum illum, sive determinatam propositorum numerorum differentiam generare, ac constituere arithmeticam rationem. Amplius si duas quascumque arithmeticas rationes modo inter se similes conferam, verbi gratiâ, rationem 12. ad 3. cum ratione 15. ad 6. nam detrahendo 6. ex 15. tantumdem relinquitur quàm si 3. ex 12. demeretur, nimirum 9. assero hanc arithmeticarum atque similium rationum comparationem, quæ per differentiarum æqualitatem progreditur, generare ac constituere proportionem arithmeticam, sive numeralem.

XXXVI. Jam verò propositis iisdem numeris 12. & 3. minorem 3. ex majore 12. non semel ut ante, sed quoties id fieri potest auferamus, sive quod idem est majorem 12. per minorem 3. dividamus, quotus ex hac divisione proveniens est numerus 4. qui suis unitatibus indicat numerum 3. in numero 12. quater contineri, vel numerum 12. quadruplum esse numeri 3. Dico igitur excessum numeri 12. supra numerum 3. eo quo dictum est modo, videlicet divisionis ope determinatum, atque limitatum, generare ac constituere proportionem geometricam, & si duas rationes quascumque geometricas, dummodo inter se similes sint invicem conferam, verbi gratiâ, rationem 12. ad 3.

ad 3. cum ratione 8. ad 2, etenim 12. per 3. aut 8. per 2. dividendo ſemper oritur numerus 4; hæc rationum geometricarum, ſimiliumque comparatio generat, atque conſtituit analogiſmum, ſive proportionem geometricam. XXXVII.

Ex his quæ de quantitatis naturâ huc uſque dicta ſunt, facilè colligitur ad theoriam, ſive ſpeculationem matheſeos univerſalis animo ritè percipiendam nihil aliud requiri quàm ut perfectam ambarum quantitatis ſpecierum, videlicet numeri, atque magnitudinis notitiam nobis comparemus: Deinde ut quantitatis in genere ſumptæ proprietates mente complectamur, quæ quidem proprietates ad ſex reduci ſuprà vidimus, nimirum ad æqualitatem, & inæqualitatem; commenſurabilitatem, & incommenſurabilitatem; proportionem, ac diſproportionem; & hinc axiomata deducamus, quæ poſteà pro fundamento argumentorum ad veritatem his in rebus indagandam neceſſariorum adhibere poſſimus. XXXVIII.

Nunc oſtenſis iis quæ ſpectant ad ſpeculationem univerſalis matheſeos, attingamus ea quæ ad ejus praxim requiruntur. Pauci numero ſunt, & valde ſimplices modi, quibus in matheſi analyticum, atque ſyntheticum opus omne peragitur, quos ratiocinio exquirere, atque enumerare facillimum eſt. Quicquid enim circa quantitates operaberis neceſſariò fiet aliquid eis addendo, aut aliquid ab eis detrahendo, quoniam quanti natura non ſinit, neque ſub imaginationem cadit aliud quid per quaſcumque operationes huic ſubjecto advenire poſſe quàm augmentum, aut decrementum. Jam verò in arithmeticis pro diverſa quantitatum oblatarum mole, atque habitudine, ac voluntate unam ab alia ſemel, vel multoties auferendi; in geometricis autem pro metamorphoſi, per quam magnitudines multiplicationis, atque diviſionis ope è genere ad genus aſcendentes, deſcendenteſve, ideſt modò plures, modò pauciores dimenſiones poſſidentes varias ſpecies induunt, ipſæ operationes, quamvis omnes augmenti, vel decrementi naturâ ſuâ participes, notabilem in forma varietatem ſuſcipiunt. Verbi gratiâ, propoſitis pluribus numeris inter ſe inæqualibus, quos in unum

colligere, sive singulos singulorum incrementis augere est animus, operatio, sive regula, per quam omnium simul sumptorum valor habetur, Additio simpliciter dicitur; verùm quãdo æquales existunt illi numeri qui proponuntur, sive quando unicus, sed aliquoties repetitus numerus objicitur, qui plurium vice consideratur, oportetque ut priùs eorum summam quærere, posito solùm unico ex datis illis numeris, invicem æqualibus, atque alio quoties primò positus accipi debeat indicante, postea certæ regulæ ope, à priori diversæ, quæ multiplicatio vocatur, totum ex datorum numerorum ut partium collectione genitum elicitur, quæ regula nihil aliud est quàm additionis compendium; idem enim per additionem fieri posset, quod expeditius fit per multiplicationem. Pariter si propositis duobus inæqualibus numeris minorem à majori semel auferre velimus, regula per quam eorum differentia, sive residuum manifestatur subtractionis, sive subductionis nomen obtinet. At quando minorem numerum à majore non jam semel ut antè, sed quoties possibile est detrahere jubemur, quamvis illum numerum, qui unitatibus suis denotat quoties minor in majore continetur, & qui propterea quotus nominatur, per crebas subductiones tandem reperire possemus, verumtamen faciliùs eadem operatio perficitur per alteram regulam, quam divisionem appellamus. Similiter propositis aliquot magnitudinibus, ipsæ per additionem, atque subductionem mole crescent, aut minuentur, at earum dimensionum numerum augebit, vel contrahet multiplicatio, atque divisio. Est adhuc peculiaris quædam divisionis species, in qua unica quantitas datur, nimirum quando quotus divisori æqualis esse debet. Atque hic dividendi modus extractio radicum dicitur, & in eo generaliter consistit ut proposita qualibet quantitate talis alia quantitas inveniatur, quæ aliquoties in se ducta quantitatem primò positam restituat, vel multò explicatius ut proposita quælibet quantitas in tot dimensiones æquales, quod quis jusserit resolvatur, atque una ex illis exhibeatur: Specialiter verò in arithmeticis, ut ex aliqua quantitate data talis

pars extrahatur, quæ in se aliquoties multiplicata illam quantitatem à qua educta est producat. Sic in universum sive Arithmetica, sive Geometrica spectes quinque numerari possunt operandi formæ, sive regulæ, per quas omnis computandi ratio perficitur, sive logistice generalis absolvitur; Additio nimirum, Subductio, Multiplicatio, Divisio, atque Radicum Extractio, quas omnes, si rem summo jure expendere velis, ad Subductionem, atque Additionem, tamquam ad duo genera, quorum aliæ regulæ species sunt, reducere possis.

Quamobrem sive praxim, sive theoriam spectes, generalis mathematicarum disciplinarum scientia paucis absolvitur; naturâ enim atque generatione quantitatis, ejusque specierum, videlicet, multitudinis, ac magnitudinis ritè explicatis, in essentiam æqualitatis, & inæqualitatis diligenter inquiri debet; posteà commensurabilitatis, & incommensurabilitatis fontes indagare, ostendere; demum à quibus principiis proportionalitas improportionalitasve oriatur considerare; ac denique omnium operationum, quæ circa quantitatem fieri possunt, videlicet Additionis, Subductionis, Multiplicationis, Divisionis, & Radicum Extractionis artificium, usum, ac proprietates exponere, & generales Canones efformare, à quibus velut ab uberrimis demonstrationum fontibus expositarum rerum doctrina derivetur. Hic verus, & naturalis ordo ad perfectam harum scientiarum structuram omninò necessarius est, quem tamen adhuc, ni fallor, observavit nemo, sed quem sequentes, ea quæ confusè tantùm alii docuerunt, nos perspicuâ methodo trademus. Quum igitur hoc in capite dictarum quantitatis affectionum, necnon omnium operationum quæ circa quantitatem fieri possunt ortus atque generationes satis superque ostenderimus, consequens esset, ut susceptâ seorsim de singulis institutione, necessaria de omnibus præcepta unde argumenta, conclusionesque ad hanc materiam spectantes deduci possent, traderemus; verum quia jam aliqua tantum artis restauratæ specimina dare volumus, ideò reliqua, quæ tamen hîc quasi digito monstravimus, in alio XXXIX.

opere dicturi, solumomdo proportionum fundamenta, & præcipua multiplicationis, atque divisionis quantitatum symptomata, quæ maximè in usum veniunt, adjungemus.

CAPUT SECUNDUM.

De Proportionibus. FONS INVENTIONIS.

QVONIAM ratio quælibet antecedentis per consequentem divisione reperitur, patet eas rationes invicem æquales esse, ac dici debere, quæ suorum antecedentium per proprios consequentes divisione quotos, sive denominatores æquales sortiuntur; illas verò inæquales, quarum antecedentes per proprios consequentes sigillatim divisi diversos quotos, sive denominatores relinquunt: Et majorem quidem illam quæ per majorem quotum, minorem verò eam quæ per minorem quotum exhibetur. Deinde etiam manifestum est antecedentem terminum pro dividuo quodam haberi, cui consequens tanquam divisor supponitur. Unde fit juxta divisionis leges ut cujuslibet rationis quotus consequentem terminum multiplicans, antecedentem quem divisit restituat. Quapropter si proponatur anologismus quicumque, sive series duarum æqualium rationum geometricarum, verbi gratiâ, A. B : : $\alpha . \beta$; & sit idem æqualium rationum quotus q, nimirum $\frac{A}{B}$ (q, & $\frac{\alpha}{\beta}$ (q; productis sub communi quoto, & utrisque consequentibus in antecedentium loca substitutis, hoc est mutatis tantum antecedentium nominibus poterit idem analogismus novâ sub specie sic exhiberi qB. B : : qβ. β. Deinde verò ad inveniendas tam rationis quàm analogismi proprietates omnes, & cætera ad proportionum materiam spectantia, nihil aliud agendum est quàm novos illos rationis sive analogismi terminos modis omnibus transponere, atque transformare per additionem, subductionem, multiplicationem, divisionem, radicum extractionem, ac per varias noviter repertorum æquipollentias ac interpretationes; ascitis etiam quandoque ad id efficiendum externis quantitatibus; nam

si post has operationes eadem, quam ante fuerat, ratio remaneat: vel si termini transpositionem vel mutationem aliquam passi proportionales semper existant (quod statim antecedentis per consequentem divisione notum fiet) modus erit inventus rationem, vel analogismum conservandi; sin minùs, destruendi.

DE MODIS ANALOGISMVM CONSERVANDI.

INVESTIGATIO I.

Exponantur duæ rationes A. B. & C. D, eidem rationi α. β. sigillatim æquales: sic A. B. :: α, β : : C. D.

Quoniam ex hypothesi A. B :: α. β. ergo per æqualium rationum notionem atque definitionem (sicut in inventionis fonte dictum est) erit $\frac{A}{B}$ (q. & $\frac{\alpha}{\beta}$ (q. Atqui per eandem rationem fit $\frac{\alpha}{\beta}$ (q. & $\frac{C}{D}$ (q. Quare cùm sit $\frac{A}{B}$ (q, & $\frac{C}{D}$ (q. Ideo,

INVENTUM I.

A. B :: C. D.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Rationes eidem rationi æquales inter se æquantur.

INVESTIGATIO II.

A.

B, C, D

Exponantur quotcumque quantitates B, C, D. invicem æquales, & sit alia quævis quantitas A.

Vnaquâque datarum quantitatum B, C, D per eundem divisorem A divisâ: vel eâdem quantitate A, per singulos divisores B, C, D sectâ, æquales quotos semper prodire necesse est, propter positam repetiti divisoris A identitatem, & dividuorum B, C, D æqualitatem: vel propter positam repetiti dividui A identitatem, & divisorum B, C, D æqualitatem. Quare per rationum æqualium definitionem.

INVENTUM II.

A. B :: A. C :: A. D atque etiam B. A :: C. A :: D. A.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Eadem quantitas ad plures æquales collata, sicut plures quantitates æquales ad eandem comparatæ quantitatem, rationem habent æqualem.

INVESTIGATIO. III.

PER PROPORTIONALEM ADDITIONEM.

Exponatur analogismus quicumque A. B :: α. β, qui (ut in inventionis fonte dictum est) novâ sub specie sic exhibeatur qB. B :: qβ. β.

Quoniam $\frac{qB}{B}$ (q, vel $\frac{\alpha}{\beta}$ (q, atque etiam $\frac{qB + q\beta}{B + \beta}$ (q, nam q $\times$ B + β ⊓ qB + qβ; & q $\times$ B ⊓ qB, vel q $\times$ β ⊓ qβ.

ERGO INVENTUM I.

qB + qβ. B + β :: qB. B :: qβ. β. Ideſt A + α. B + β :: A. B :: α. β.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

1°, Si quantitates A & B rationem quamlibet geometricam continentes augeantur quantitatibus α & β (antecedens quidem antecedente, conſequens verò conſequente) inter quas α & β eadem ratio cadat quam quæ inter A & B reperitur; itaut auctæ fiant A + α & B + β. Erit ut ſimplex A ad ſimplicem B, ſic aucta A + α ad auctam B + β, quare:

A proportionali terminorum augmento, ratio, atque adeò proportio non mutatur.

2°, *Si ſint quotlibet rationes æquales* A. B :: α. β. *(nam quando plures eſſent eodem modo procederet argumentatio), ut unus terminus antecedens ad ſuum conſequentem, ſic ſumma omnium antecedentium ad ſummam omnium conſequentium.*

COROLLARIUM.

Quare ſi in una quantitatis ſpecie, videlicet in numeris abſolutis, minimi cujuſlibet rationis termini exiſtant, qui ſint A & B, quoniam A. B :: A. B. ergo per probata

$(A + A\pi)$ 2A. $(B + B\pi)$ 2B :: A. B. & erunt termini 2A & 2B proxime majores, eandem quam minimi A & B rationem continentes, quoniam minimo proportionali augmento crevêre. Deinde quia 2A. 2B :: A. B. ergo etiam per probata 3A. 3B :: A. B, eruntque termini 3A. & 3B. proxime majores, eandem quam ipsi 2A. & 2B, vel ipsi A. & B. rationem continentes, quoniam minimo proportionali augmento rursus crevêre, atque eo deinceps progressu. Igitur:

In numeris duo cujuslibet rationis termini aut minimi sunt hujus rationis termini, aut horum minimorum æquimultiplices.

INVESTIGATIO IV.

PER PROPORTIONALEM SUBDUCTIONEM.

Iisdem ut priùs positis nimirum A. B :: α. β, idest qB. B :: qβ. β.

Quoniam $\frac{qB - q\beta}{B - \beta}$ (q. & $\frac{qB}{B}$ (q, vel $\frac{q\beta}{\beta}$ (q. Nam ut prius idem quotus q, divisores B $-\beta$ & B vel β multiplicans dividua qB $-$ qβ & qB. vel qβ restituit. Ergo:

INVENTUM II.

qB $-$ qβ. B $-\beta$ :: qB. B :: qβ. β. idest A $-\alpha$. B $-\beta$ :: A. B :: α. β.

QUOD SIC INTERPRETARI LICET.

1°. Si quantitates A. & B. rationem quamlibet geometricam cõtinentes minuantur quantitatibus α. & β, inter quas ablatitias eadem ratio cadat quam quæ inter totales A. & B. reperitur; itaut residuæ fiant A $-\alpha$ & B $-\beta$; erit ut tota A. ad totam B sic residua A $-\alpha$ ad residuam B $-\beta$. Quare:

A proportionali terminorum decremento ratio, atque adeo proportio non mutatur.

Etsi to torum & ablatorum una eademque ratio fuerit, eadem erit & reliquorum.

Vel aliis verbis; *Si tota partibus sibi proportionalibus mulctentur, residua totis, vel ablatis proportionalia sunt.*

2°, *Si sint quotlibet rationes æquales* A. B. :: α. β. (*nam*

quando plures essent eodem modo procederet argumentatio) ut unus terminus antecedens ad suum consequentem, sic differentia omnium antecedentium ad differentiam omnium consequentium.

INVESTIGATIO V.

PER COMMUNEM MULTIPLICATOREM.

Exponatur ratio quælibet (geometricam semper intelligo) terminis A. & B. expressa, quorum uterque per eandem, C. multiplicetur, ita ut producta fiant AC. & BC.

Quoniam $\frac{AC}{BC}$ ($\frac{A}{B}$ & $\frac{A}{B}$ ($\frac{A}{B}$ nam ut prius idem quotus $\frac{A}{B}$ divisores B C & B multipicans dividua A C & A restituit. Ergo per inventionis fontem.

INVENTUM III.

AC. BC :: A. B.

QUOD SIC INTERPRETARI LICET.

1° *A communi multiplicatore ratio vel proportio non mutatur.*
Vel ; *Si eadem quantitas duas alias multiplicet producta quantitates multiplicatis proportionales erunt.*

INVESTIGATIO. VI.

PER COMMUNEM DIVISOREM

Exponatur ut prius ratio quælibet terminis A. & B. expressa, quorum uterque per eandem, d, dividatur, itaut quoti fiant $\frac{A}{d}$ (x & $\frac{B}{d}$ (y.

Quoniam quoti x & y eumdem divisorem d, multiplicantes dividua A. & B. restituunt. Ergo:

INVENTUM. IV.

A. B. (πxd. yd) :: x. y.

QUOD SIC INTERPRETARI LICET.

A communi divisore ratio, atque adeo proportio non mutatur

tatur: vel aliis verbis; *Si duæ quantitates per eandem dividantur, ratio quotorum eadem est quam quantitatum divisarum.*

2°, Quia A. B :: x. y. Id est ratio A. d. ad rationem B. d, quoniam binæ illæ rationes per quotos x & y earum indices sigillatim significantur. Ergo,

Binæ rationes (A. d & B. d) *eundem consequentem* (d) *habentes sunt inter se ut directo ordine sumpti antecedentes* (A. B.)

COROLLARIUM I.

Hinc facilè demonstratur Regula additionis, & subductionis fractionum diversas denominationes habentium.

Sunto enim duæ diversæ denominationis fractiones $\frac{n}{d}$ & $\frac{N}{D}$, quas in unam colligere, vel unam ab alia subducere velimus.

Regula docet harum fractionum summam, vel differentiam esse $\frac{nD \pm Nd}{dD.}$

Quoniam verò nD. dD :: n. d, atque etiam Nd. dD :: N. D. Ergo $\frac{nD}{dD} \sqcap \frac{n}{d}$, & per eandem rationem $\frac{Nd}{dD} \sqcap \frac{N}{D}$ consequenter igitur $\frac{nD \pm Nd}{dD} \sqcap \frac{n}{d} \pm \frac{N}{D}$: ut erat ostendendum.

COROLLARIUM. II.

Hinc etiam demonstrantur Regulæ multiplicationis, atque divisionis fractionum.

Nam 1°, Sunto duæ fractiones $\frac{n}{d}$ & $\frac{N}{D}$, quas inter se multiplicare velimus.

Regula docet harum fractionum productum esse $\frac{nN}{dD}$.

Jam si Regula bona est fieri debet ex multiplicationis naturâ 1. $\frac{n}{d}$ :: $\frac{N}{D}$. $\frac{nN}{dD}$, & utriusque propositæ fractio-

nis tam denominatoribus, quàm numeratoribus in denominatorem producti, videlicet dD ductis, positoque $\frac{dD}{dD}$ pro unitate, superior quantitatum series mutatis tantùm propositarum fractionum, & unitatis nominibus novâ sub specie sic exhibebitur $\frac{dD}{dD}. \frac{nD}{dD} :: \frac{Nd}{dD}. \frac{nN}{dD}$. Et quia per probata $\frac{dD}{dD}. \frac{nD}{dD} :: dD. nD$, atque etiam $\frac{Nd}{dD}. \frac{nN}{dD} :: Nd. nN$, estque $\frac{dD}{dD}$ unitas, erit igitur dD. nD :: Nd. nN, & productum sub extremis dDnN Π nDNd producto sub mediis. Quod cùm verum sit sequitur 1. $\frac{n}{d} :: \frac{N}{D}. \frac{nN}{dD}$ verum esse analogismum, & $\frac{nN}{dD}$ productum esse fractionum $\frac{n}{d}$ & $\frac{N}{D}$ invicem multiplicatarum, atque adeò traditam Regulam bonam esse.

Simili prorsus argumentatione demonstrabitur legitimam esse traditam de fractionum divisione Regulam.

INVESTIGATIO V.

PER OMNIMODAM QUOTLIBET QUANTITATUM INTER SE MULTIPLICATIONEM.

1°, Sunto duæ quælibet quantitates A & B, quæ se invicem modis omnibus multiplicent, itaut producta fiant AB, & BA.

Si A Π B manifestum est AB Π BA ob invariabilem æqualitatis naturam; sed si alterutra puta B ⊓ A, itaut earum differentia sit E, erit B—E Π A, & A + E Π B.

Jam quia A + E Π B, igitur utrâque æqualitatis parte per eandem A multiplicata, productum (A × A + E Π) + AA + AE Π AB.

Sed etiam B − E Π A, igitur utrâque æqualitatis parte per eandem B multiplicata, factum (B × B − E Π) + BB − BE Π BA.

Productum autem ($A + E \times A + E\ \Pi$) $+ A^2 + 2AE + E^2\ \Pi + BB$, & productum ($A + E \times - E\ \Pi - AE - EE\ \Pi$) $- BE$. Atque horum productorum summa $AA + AE\ \Pi$ ($+ BB - BE\ \Pi$) $+ BA$, consequenter igitur $AB\ \Pi\ BA$.

OPERATIO TALIS EST.

MULTIPLICATIONES.

1ª	2ª	3ª	4ª
$A + E\Pi + B$	$+ B - E\Pi . A$	$- E$	$+ A + E\Pi + B$
$\times A$	$\times B$	$\times A + E\Pi + B$	$\times + A + E\Pi \times B$
$+ A^2 + AE\Pi + AB$	$+ BB - BE\Pi + BA$	$- AE - E^2\Pi - BE$	$+ A^2 + 2AE + E^2\Pi + B^2$
			$- AE - E^2\Pi - BE$

Additio.

Summa $+ A^2 + AE\ \Pi$ ($+ B^2 - BE\ \Pi$) $+ BA\ \Pi + AB$.

2°. Tres quantitates A, B, C, modis omnibus se invicem multiplicando producant ABC, ACB, BCA, BAC, CAB, CBA.

Ex demonstratis $BC\ \Pi\ CB$.

Ergo $A \times BC\ \Pi\ A \times CB\ \Pi\ BC \times A$.

Pari ratione $CA\ \Pi\ AC$.

Ergo $B \times AC\ \Pi\ CA \times B$.

Sed etiam $AB\ \Pi\ BA$.

Igitur $C \times AB\ \Pi\ C \times BA$. Omnia igitur enata producta æquantur inter se.

Simili prorsus argumentatione probabitur quatuor, vel plurium quantitatum quocumque ordine sumptarum producta inter se æquari, nam semper in aliquot earum productis tres termini (si quatuor adsint quantitates, vel quatuor termini, si propositæ quantitates quinque numero existant, & sic in infinitum) similes se invicem multiplicabunt; quorum facta inter se æquabuntur, ut jam conclusum est; ideoque licet quarta, vel ulterior quantitas residua talia facta multiplicet, sive ab eis multiplicetur, genita ab his multiplicationibus producta inter se æquari necesse est. Quare

INVENTUM. V.

Si plures quantitates se invicem multiplicent producta sunt æqualia quocumque quantitatum ordine multiplicatio fiat.

DEMONSTRATIO PARTICULARIS IN NUMERIS.

Ex numero A in numerum B fiat A B, & ex numero B in numerum A fiat B A. Dico A B п B A.

Ex multiplicationis, & numerorum naturâ productus numerus A B constat ex multiplicato numero B toties posito, quot sunt in multiplicante A unitates. Unde si ex singulis numeris B, in producto AB contentis sumatur unitas, sumptarum unitatum multitudo æquabitur unitatum in numero A contentarum multitudini, hoc est sumptarum unitatum aggregatum æquabitur numero A. Toties autem sumi poterit illud aggregatum quot sunt in numero B unitates. Sed in producto numero BA multiplicatus numerus A toties continetur, quot sunt in multiplicante B unitates, ex multiplicationis naturâ, ergo productus numerus BA æquatur producto numero AB, sicut erat ostendendum.

INVESTIGATIO VI.

Per mutuam terminorum analogismum efficientium multiplicationem.

Posito ut priùs qB. B :: qβ. β. extremos terminos invicem, & medios etiam inter se multiplicando, fit

INVENTUM VI.

qB β п Bqβ. per mox probata.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si quatuor quantitates proportionales fuerint, productum sub extremis æquatur producto sub mediis.

ALIA EJUSDEM REI DEMONSTRATIO.

Esto A. B : : $\alpha . \beta$. ergo $\frac{A}{B} \Pi \frac{\alpha}{\beta}$ & utramque æqualitatis partem per $B\beta$ multiplicando fit $\frac{AB\beta}{B} \Pi \frac{\alpha B\beta}{\beta}$ idest $A\beta \Pi \alpha B$. ut erat ostendendum.

COROLLARIUM I.

Itaque cognitis analogismi tribus terminis quibuscumque quartus invenietur.

1°, Si duo medii dentur cum uno extremorum, invenietur alter extremus multiplicando duos medios inter se, & productum dividendo per datum extremum; quotus enim ex hac divisione proveniens æquabitur alteri extremo.

Verbi gratiâ, detur A.B : : C.O, sitque O, ignotus terminus, fiet $\frac{BC}{A} \Pi$ O. & erit A.B : : C. $\frac{BC}{A}$. Nam productum sub extremis $\frac{BCA}{A} \Pi$ B C producto sub mediis. Etenim $\frac{BCA}{A} \Pi BC$. Atque hæc 1ª. corollarij pars fundamentum est Regulæ trium directæ.

2°, Si dentur duo extremi cum uno mediorum, alter medius invenietur productum ex multiplicatione extremorum dividendo per datum medium. Nam quotus ex hac divisione proveniens æquabitur alteri medio.

Verbi gratiâ; Detur A.B : : O. D. erit o ignotus terminus æqualis $\frac{AD}{B}$, unde nascetur integer analogismus A. B : : $\frac{AD}{B}$. D. Nam $AD \Pi \frac{ADB}{B}$. Atque hæc 2ª. corollarii pars fundamentum est Regulæ trium eversæ.

3°, Vel si datis duabus quantitatibus tertiam proportionalem adjungere velimus, multiplicabimus 2ᵃᵐ in se,

& productum dividemus per 1^{am}; ac quotus ex hac divisione proveniens erit 3^a. proportionalis quæsita.

Veluti si dentur duæ quantitates A & B. fiat $\frac{BB}{A}$, & erunt A. B. $\frac{BB}{A}$ ∺ nam $\frac{BBA}{A}$ ⊓ B B.

4°. Vel tandem si datis duobus extremis quæratur medius proportionalis. Multiplicari debent inter se dati extremi, & producti radix subæquibimensa erit medius quæsitus.

Nam radix subæquibimensa seipsam multiplicans dat suum æquibimensum, sive productum sub extremis.

APPENDIX I.

Ex continuatâ methodo tertiam proportionalem ad duas datas quantitates adjungendi patet inventio Mesolabii, sive inventio quotlibet mediarum continuè proportionalium inter duas datas quantitates, puta inter A & B.

Nam quia A. B. $\frac{BB}{A}$ ∺ & eâdem methodo A.B. $\frac{B^2}{A}$ $\frac{B^3}{A^2}$ ∺ Atque etiam A. B. $\frac{B^2}{A}$. $\frac{B^3}{A^2}$. $\frac{B^4}{A^3}$ ∺ & sic in infinitum; omnibusque 1e quantitatum seriei terminis per A. 2^e per A^2. 3^e per A^3 multiplicatis fit A^2. AB. B^2 ∺, & A^3. A^2B. AB^2. B^3 ∺, Atque etiam A^4. A^3B. A^2B^2. AB^3. B^4 ∺ Itaque.

REGULA.

Si inter duas quascumque quantitates puta A & B unum medium proportionale reperire velim, unamquamque attollam ad 2^{am} potestatem, ut fiat A^2 & B^2 inter quas cadet unum medium proportionale A B; Si verò duo media proportionalia reperire velim, ipsarum A & B. tertias potestates sumam, nimirum A^3 & B^3, inter quas cadent duo media proportionalia A^2B & AB^2 &c: uno verbo ut habeatur tot media proportionalia, quot quis voluerit inter duas datas quantitates, debent ipsæ ad eos gradus attolli, quorum index unitate

excedit numerum quæsitorum mediorum. Nam ex dicta methodo plures quantitates continuè proportionales inveniendi manifestum fit inter duo æquibimensa cadere unum medium proportionale, ac inter duo æquitrimensa duo media proportionalia reperiri, & sic in infinitum. Jam verò quoniam quæ sunt proportionalia potestate, sunt etiam proportionalia radice; sumptis igitur tam ipsarum potestatum, quàm mediorum proportionalium radicibus, ab ipsarum potestatum gradu denominatis optatum habebitur. Nam quia est $A^2. AB. B^2 \div\!\!\div$ ergo $A. \sqrt{AB}|. B \div\!\!\div$ vel quia $A^3. A^2B. AB^2. B^3 \div\!\!\div$ ergo $A. \sqrt[3]{A^2B}|. \sqrt[3]{AB^2}|. B \div\!\!\div$, & eo deinceps progressu.

APPENDIX II.

Hinc & ex quatuor primis inventis methodus elicitur datam quamlibet rationem majoribus, vel minoribus terminis, quam ii, quibus ipsa continetur ad libitum exprimendi, idque duobus modis.

Detur enim quælibet ratio A. B.

1°, Sumptâ quâlibet quantitate α, fiat $A. B :: \alpha. \beta.$ sive tribus A, B, α inveniatur 4^a. proportionalis β. & erit per 1um. inventum $A. B :: A \pm \alpha. B \pm \beta.$

2°, Positâ eadem ratione A. B. ducatur uterque terminus A & B in eandem quantitatem D. fietque $AD. BD :: A. B.$ per inventum 3um.

Vel dividatur uterque terminus A & B per eandem C, & habebitur $\frac{A}{C}. \frac{B}{C} :: A. B$ per mox probata.

APPENDIX. III.

Jam facilè est efficere ut duarum magnitudinum cujuscumque generis illæ sint, modo in unâ totidem dimensiones sint quàm in altera, proportio in rectis lineis conspiciatur.

Sunto enim duæ plurimensæ magnitudines ABC, & DEF.

Inter A & B reperiatur media proportionalis, quæ vocetur M, unde erit $A. M. B \div\!\!\div$, & consequenter

MM ⊓ AB, Atque sic M·C ⊓ ABC. Postea fiat M.D :: E.G. ergo MG ⊓ DE. unde erit MGF ⊓ DEF. ultimo fiat M. G :: F.K. ergo MK ⊓ GF, & consequenter MMK ⊓ DEF. Quare MMC. MMK :: C.K. Eâdem prorsus methodo duorum quorumlibet planimensorum similium ratio in rectis lineis exhibebitur. Qua de re plura verba fecimus initio libri secundi, cùm de compositionis, & resolutionis methodo disseruimus.

COROLLARIUM II.

Esto AD ⊓ BC. ex invento 4° fit A. B :: AC (BC ⊓) AD :: C.D. ergo A. B :: C. D. Quare

Si quatuor quantitates fuerint (A, B, C, D) *& productum extremarum* AD ⊓ BC *producto mediarum, illæ quatuor quantitates erunt proportionales.*

COROLLARIUM. III.

Esto $\frac{A}{B}$ (x, & $\frac{A}{C}$ (y. ergo BX ⊓ (A ⊓) cy, & hanc æqualitatem producti sub extremis cy cum producto sub mediis BX in proportionem resolvendo habetur C. B :: X. Y. Ergo :

Si eadem quantitas A, *per duas alias* B & C *dividatur, & divisionum quoti sint* X & Y. *Ut quoti ad invicem* nempe X & Y *sic se habent inverso ordine sumpti divisores* C. B.

Vel brevius; *Ejusdem quantitatis per duas divisæ quoti sic se habent ad invicem ut inverso ordine sumpti divisores.*

2°, Si sint duæ rationes A. B & A. C. eundem antecedentem A habentes, erit ut ratio A. B ad rationem A. C (hoc est ut quotus X ad quotum Y) sic inverso ordine sumpti consequentes C. B.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Binæ rationes eundem antecedentem habentes sunt inter se ut reciproce sumpti consequentes.

COROLLARIUM IV.

Hinc, & ex probatis ab initio liquet inventio summæ omnium

omnium terminorum continuæ proportionis geometricæ.

Nam esto quælibet series, cujus duo primi termini sint α, β, ultimus terminus ω, summa verò omnium terminorum quæsita z, summa omnium antecedentium erit $z-\omega$ & $z-\alpha$, summa omnium consequentium.

Quare per 1um Inventum fit $\alpha . \beta :: z-\omega . z-\alpha$ & per ultimò repertum $\alpha z-\alpha\alpha \sqcap \beta z-\beta\omega$, ac per antithesim $+\beta z-\alpha z \sqcap +\beta\omega-\alpha\alpha$, & utraque æqualitatis parte per $\beta-\alpha$ divisa oritur $+z \sqcap +\frac{\beta\omega-\alpha\alpha}{\beta-\alpha}$ unde elicitur

HÆC REGULA. *Si productum secundi, & ultimi termini æquibimenso primi multatum dividatur per differentiam primi, & secundi, quotus inde proveniens æquabitur summæ omnium terminorum continuæ proportionis geometricæ.*

COROLLARIUM V.

Exponantur quotlibet quantitates A, B, C.

Fiat $\frac{A}{B}$ (E & $\frac{B}{C}$ (H atque $\frac{A}{C}$ (K. Ergo BE $\sqcap$ (A $\sqcap$) CK: & hanc æqualitatem in proportionem resolvendo habetur B . C :: K . E. Ergo $\frac{B}{C}$ (H & $\frac{K}{E}$ (H. Ergo K $\sqcap$ EH.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si fuerint quotlibet quantitates A, B, C, *ratio extremarum* A . C *videlicet quotus* K, *eam significans, æquatur intermediis rationibus* A . B & B . C. *invicem multiplicatis, nimirum quotorum producto* EH, *has medias rationes exhibentium.*

APPENDIX.

Quare si fuerint duo quilibet proportionalium quantitatum ordines, quæ bina in eâdem ratione sumantur, ex æquo proportionales erunt

Nam semper in utrâque proportionalium serie, æquales, & numero totidem intermediæ rationes existent, ergo extremarum rationes, quæ rationibus intermediis, quovis ordine inter se multiplicatis æquales sunt, sive ordinata, sive perturbata fuerit proportio, inter se æquari necesse est.

Verbi gratiâ, { I. Ordo directus A.B.C. { & fit A. B :: D.F,
{ II. Ordo directus D.F.G. { Item B.C :: F.G.

Ergo $\frac{A}{B}$ (q $\frac{B}{C}$ (X } Jam ex demonstratis productum qX index est tam rationis A. C. quam rationis D. G.
$\frac{D}{F}$ (q $\frac{F}{G}$ (X { Ergo A. C :: D. G.

Deinde, { I. Ordo directus B.C. D. } & fit B. C :: β. γ.
{ II. Ordo turbatus δ. β. γ. } Item C. D :: δ. β.

Ergo $\frac{B}{C}$ (q $\frac{C}{D}$ (X } Quia productum qX index est rationis B. D productum verò Xq. index est rationis δ. γ. & ex demon-
$\frac{\beta}{\gamma}$ (q $\frac{\delta}{\beta}$ (X { stratis qX Π Xq; idcirco B.D :: δ.γ.

COROLLARIUM VI.

Hinc generalis methodus elicitur quotlibet rationes inter se componendi, vel unam ad aliã subducendi, idque duobus modis.

Etenim dentur duæ quælibet rationes A. B, & C. D. quas in unam colligere velimus.

1° Fiat C. D :: B. E. & ratio A. E æquabitur rationibus intermediis A. B + (B. E Π) C. D.

Vel fiat H. A :: C. D : & ratio H. B. æquabitur rationibus intermediis (H. A Π) C. D + A. B.

2° Iisdem positis rationibus A. B, & C. D. Fiat AC, BC, BD.

Ergo AC. BC :: A. B. necnon BC. BD :: C. D. per inventum 4um.

Ergo ratio extremarum AC. BD. æquatur rationibus intermediis (AC. BC. + BC.BD Π) A.B + C. D.

QUOD SIC ENUNCIATUR

1°. *Si fiat ut antecedens terminus unius rationis ad suum consequentem, ita alterius rationis consequens ad aliam*

quantitatem, vel ita alia quantitas ad alterius rationis antecedentem; ultimò sumptæ rationis antecedens ad inventam quantitatem, vel inventa ad ultimò sumptæ rationis consequentem, rationem habebit ex propositis rationibus compositam.

2° *Ratio producti antecedentium ad productum consequentium componitur ex datis rationibus.*

Jam verò si proponantur duæ quælibet rationes A. B & C. D. sitque ratio C. D subducenda ex ratione A. B.

1°, Fiat A. E. :: C. D, & habebitur A. E. B. Ergo ratio extremarùm A. B æquatur rationibus intermediis (A. E ::) C. D + E. B. Quare ratio E. B. est propositarum rationum differentia.

2°, Positis iisdem rationibus A. B. & C. D. Fiat AC. AD. BC.

Jam AC. BC :: A. B, & AC. AD :: C. D. Ergo extremarum ratio (AC. BC ::) A. B :: (AC. AD ::) C. D + AD. BC. Quare ratio AD. BC est datarum rationum differentia.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

1°, *Si fiat antecedens terminus illius rationis, à qua altera data ratio subduci debet, ad ascititiam quantitatem, ut est antecedens subducendæ rationis ad suum consequentem, ratio ascititiæ quantitatis ad 1° sumptæ rationis consequentem erit quæsita datarum rationum differentia.*

2°, *Si dentur duæ quæcumque rationes, ratio producti sub extremis terminis ad productum sub mediis est datarum rationum differentia.*

APPENDIX. I.

Quare si duo diversi dentur Analogismi, verbi gratiâ,

A. B :: α. β.

&

D. E :: δ. ε.

Erit per mox probata (A. B + D. E п) AD. BE :: (α. β. + δ. ε п) αδ. βε.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si proportionalia per proportionalia multiplicentur, facta sunt proportionalia.

APPENDIX. II.

Et si sint $\left\{\begin{matrix} A.\,B :: \alpha.\,\beta. \\ C.\,D :: \delta.\,\epsilon. \end{matrix}\right\}$ fiat $\frac{A}{C}$ (X, $\frac{B}{D}$ Y, $\frac{\alpha}{\delta}$ (q, $\frac{\beta}{\epsilon}$ (H.

Ergo XC. YD : : qδ. Hε. Si quidem sunt ipsæmet quantitates analogismi A.B : : α.β. sed alio modo denominatæ per divisionis leges.

Atqui ratio XC. YD ⊓ rationibus X. Y + C. D, per antè probata;

Ratio verò qδ. Hε ⊓ rationibus q. H + δ. ε.

Ergo ab æqualibus rationibus XC. Yδ : : qδ. Hε subductis utrimque æqualibus C. D & δ. ε; (nam ex hypothesi C. D : : δ. ε) reliqua ratio X. Y reliquæ rationi q. H æqualis erit.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si proportionalia per proportionalia dividantur, orta sunt proportionalia, sive quoti sunt proportionales.

APPENDIX III.

Atque hinc sequitur, quæ sunt proportionalia radice esse proportionalia simili potestate, & contra.

Nam, verbi gratiâ, $A^2.\ B^2$ ⊓ A. B + A. B, &. $A^3.B^3$ ⊓ A. B + A. B + A. B &c.

APPENDIX IV.

Hinc etiam sequitur non solùm æquibimensa esse in ratione duplicata suorum laterum, æquitrimensa verò in ratione triplicata suorum etiam laterum, ut ostensum est, sed etiam generaliter omnia plurimensa similia esse in ratione homologorum laterum, æquimultiplicata numero dimensionum, ex quibus componuntur.

Verbi gratiâ, sunto duo quadrimensa ABCD & EFGH, quorum homologa latera sint in ratione R. S.

Quia $\left\{\begin{array}{l} A.\ E :: R.\ S. \\ B.\ F :: R.\ S. \\ C.\ G :: R.\ S. \\ D.\ H :: R.\ S. \end{array}\right\}$ erit per multiplicationem ABCD. EFGH :: $R^4.\ S^4$.

APPENDIX V.

Hinc etiam sequitur si plures quantitates sint proportionales, ut est prima ad ultimam, sic esse potestatem primæ æquimultiplicatam numero terminorum minus uno ad potestatem similem secundæ.

Verbi gratiâ, sumto A. M. N. E ÷.

Quia $\left\{\begin{array}{l} A.\ M :: A.\ M \\ M.\ N :: A.\ M \\ N.\ E :: A.\ M \end{array}\right\}$ erit per multiplicationem (AMN.MNE ::) A.E :: $A^3.M^3$.

APPENDIX VI.

Quare Methodus habetur datâ quantitate, sive unius, sive plurium dimensionum similem inveniendi, ad quam proposita quantitas datam teneat rationem: verbi gratiâ z. f.

1°. Si detur A; Fiat z. f :: A. B, & erit B. quantitas quæsita.

2°, Si detur A^2, inter z & f quæratur media proportionalis, quæ sit m, itaut fiat z. m. f ÷; Deinde ponatur z. m :: A. D: ergo $A^2.\ D^2$ :: ($z^2.\ m^2$ ::) z. f, ergo D^2. est quantitas quæsita.

3°. Si detur A^3. inter z & f quærantur duæ mediæ proportionales, puta n, p. itaut fiat z. n. p. f ÷ Deinde ponatur z. n :: A. C. ergo $A^3.C^3$ :: ($z^3.n^3$ ::) z.f. Igitur C^3 est quantitas quæsita.

Eodem modo in altioribus gradibus argumentari licet, ut manifestum est.

Quod si datæ rationis termini plures haberent dimensiones, priùs oporteret per ea, quæ ad finem inventi 4ti. tradita sunt, efficere ut datorum terminorum ratio in rectis lineis conspiceretur.

Quod si z sit 1, f. verò 2, vel 3. &c. per traditam methodum habebitur cubi, ut vocant, vel aliæ cujuslibet potestatis duplicatio, triplicatio &c.

DE RELIQUIS MODIS ARGUMENTANDI PER PROPORTIONES.

Poſito ut prius Analogiſmo $A. B :: \alpha. \beta$, vel quod idem eſt $qB. B :: q\beta. \beta$.

1°, Quia $\frac{B}{qB} (\frac{1}{q}$, & $\frac{\beta}{q\beta} (\frac{1}{q}$; nam $\frac{1}{q} \times \frac{qB \sqcap B}{q\beta \sqcap \beta}$, ergo per æqualium rationum definitionem fit $B. qB :: \beta. q\beta$, ideſt $B. A :: \beta. \alpha$.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si quatuor quantitates directè proportionales fuerint; etiam inversè proportionales erunt.

2°, Quia $\frac{qB}{q\beta} (\frac{B}{\beta}$, & $\frac{B}{\beta} (\frac{B}{\beta}$. Ergo $qB. q\beta :: B. \beta$. vel brevius per 3um inventum, quia à communi multiplicatore ratio non mutatur, erit $qB. q\beta :: B. \beta$. ideſt $A. \alpha :: B. \beta$.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si quatuor quantitates directè proportionales fuerint; etiam alternè proportionales erunt.

ALIA EJUSDEM REI DEMONSTRATIO.

Eſto ut prius $A. B :: \alpha. \beta$. tranſpoſitis mediis terminis erit adhuc $A. \alpha :: B. \beta$. Nam ſemper productum extremorum $A\beta \sqcap \alpha B$ producto mediorum.

Hæc demonſtratio quamvis rectè concludat, tamen rei cauſam, ſive cur res ita ſit non declarat.

3°, Quia $\frac{qB \pm B}{B} (q \pm 1$, & $\frac{q\beta \pm \beta}{\beta} (q \pm 1$. Nam $q \pm 1 \times \frac{B \sqcap qB \pm B}{\beta \sqcap q\beta \pm \beta}$. Ergo $qB \pm B. B :: q\beta \pm \beta. \beta$. ideſt $A \pm B. B :: \alpha \pm \beta. \beta$.

ALIA EJUSDEM REI DEMONSTRATIO.

Ex hypotheſi eſt $A. B :: \alpha. \beta$. & alternè $A. \alpha :: B. \beta$. ergo per primum & 2um. inventum $A \pm B. \alpha \pm \beta :: (A. \alpha ::) B. \beta$, & alternè $A \pm B. B :: \alpha \pm \beta. \beta$.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si quatuor quantitates proportionales fuerint, etiam directè componendo, vel dividendo proportionales erunt.

4°, Quia $\frac{qB \pm q\beta}{q\beta} (\frac{B \pm \beta}{\beta}$, & $\frac{B \pm \beta}{\beta} (\frac{B \pm \beta}{\beta}$. Nam $\frac{B \pm \beta}{\beta} \times_{\beta \sqcap B \pm \beta.}^{q\beta \sqcap qB \pm q\beta.}$ Ergo $qB \pm q\beta .\ q\beta :: B \mp \beta .\ \beta$. ideſt $A \pm \alpha .\ \alpha :: B \pm \beta .\ \beta$.

ALIA EJUSDEM REI DEMONSTRATIO.

Quia eſt $A.B :: \alpha .\ \beta$. & alternè $A.\alpha :: B.\ \beta ::$ Ergo directè componendo, vel dividendo fit $A \pm \alpha .\ \alpha :: B \pm \beta .\ \beta$.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si quatuor quantitates directè proportionales fuerint, etiam alternè componendo, vel dividendo proportionales erunt.

5°, Quia probatum eſt $A + B.\ \alpha + \beta :: (B.\ \beta ::)\ A - B.\ \alpha - \beta$. ergo alternè $A + B.\ A - B :: \alpha + \beta :: \alpha - \beta$.
Vel quia probatum eſt $A + \alpha .\ B + \beta :: (\alpha .\ \beta ::) A - \alpha .\ B - \beta$. Ergo alternè $A + \alpha .\ A - \alpha :: B + \beta .\ B. - \beta$.

QUOD SIC ENUNCIATUR

Si quatuor quantitates proportionales fuerint, etiam directè, & alternè miſcendo proportionales erunt.

Itaque ſi quatuor quantitates proportionales fuerint, etiam inversè, alternè, compoſitim, diviſim, & mixtim proportionales erunt.

Hos ultimos argumentandi modos ſimul colligere operæ-pretium duxi., ut in ſequenti tabula cernitur.

Directè	$A.B :: \alpha .\ \beta$
Inversè	$B.\ A :: \beta .\ \alpha$.
Alternè	$A.\alpha :: B.\ \beta$.

Componendo vel Dividendo { $A \pm B . B :: \alpha \pm \beta . \beta$ directè.
{ $A \pm \alpha . \alpha :: B \pm \beta . \beta$ alternè.

Miscendo { $A + B . A - B :: \alpha + \beta . \alpha - \beta$ directè.
{ $A + \alpha . A - \alpha :: B + \beta . B - \beta$ alterné

COROLLARIUM.

Esto $A . B :: \alpha . \beta$. & sit $A \sqsupset B$, vel α, vel β.
Quoniam alternè $A . \alpha :: B . \beta$, & est $A \sqsupset \alpha$: ergo $B \sqsupset \beta$.
At ex probatis $A - B . \alpha - \beta :: B . \beta$. Ergo $A - B \sqsupset \alpha - \beta$. & utrimque additis $B + \beta$. fit $A + \beta \sqsupset \alpha + B$.
Vel si sit $A . B :: B . C$. & sit $A \sqsupset B$ vel C. erit $A + C \sqsupset 2 B$.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si quatuor quantitates proportionales fuerint, maxima & minima reliquis duabus majores erunt. At si tres sint in continua proportione, ambæ extremæ majores erunt duplâ mediâ.

Atque hi ferè sunt modi in terminis transpositionem, vel mutationem aliquam passis analogismum conservandi, quos omnes uno Canone complecti non abs re fuerit. Itaque.

CANON GENERALIS.

DE MODIS ANALOGISMUM CONSERVANDI.

Quando Analogismus per Analogismum multiplicatur, aut dividitur; vel quando ejus termini inversè, alternè, compositim, divisim, mixtimque sumuntur; seu cùm soli antecedentes, solive consequentes per idem, aut per æqualia; vel cùm antecedentes per unam quantitatem, consequentes verò per alteram multiplicantur, aut dividuntur; & adhuc cum proportionali augmento crescunt, aut cum proportionali contractione minuuntur; quin etiam cum similium radicum extractione mutationem aliquam patiuntur: Uno verbo cùm homologi termini similiter transformantur, semper inter Analogismi terminos (variatâ tamen rerum ratione) proportionalitas custoditur.

Multa

Multa adhuc tam de Analogiſmo, quàm de Diſproportione, & præſertim de exceſſiva, & defectiva ratione dicenda ſuperſunt; ſed quæ hîc deſunt in alio opere tradentur: ea nunc libens omitto, cùm quilibet veſtigia noſtra ſequendo hanc proportionum materiam facilè promovere, & quantum libuerit extendere valeat.

CAPUT TERTIUM.

De præcipuis Symptomatibus, quæ à quantitatum multiplicationibus, atque diviſionibus proveniunt:

Sive,

De præcipuis Æquationes inſtituendi modis.

MONITUM.

CUM hîc plures quantitates, æquationis ope, invicem comparo, ſemper intellectum velim de quantitatibus homogeneis, vel eundem dimenſionum numerum habentibus, ne homogenei nomen ſæpiùs repetatur; Ideò verò generali quantitatis voce uſus ſum, ut indicarem hanc doctrinam maximè univerſalem eſſe, & indifferenter numeris, aut magnitudinibus accommodari poſſe: & quamvis ejus concluſionum veritas in quantitatibus ad quemlibet, modò ad eundem dimenſionum numerum aſcendentibus, oſtendi poſſit, verumtamen utiliſſimum erit hoc in loco quantitates ſimplices, ſive unicam dimenſionem habentes tantùm intelligere, quò ſimpliciora, & captu faciliora evadant neceſſaria hæc æquationum principia. His præmiſſis ſequitur

PRIMUS FONS INVENTIONIS.

Quoniam partes omnes ſimul ſumptæ toti ſuo coæquantur, & à communi multiplicatore, vel diviſore, ſecto, vel inſecto non mutatur æqualitas. Igitur

PROPOSITIO FUNDAMENTALIS.

Summa productorum, à singulis alicujus quantitatis partibus, in communem quantitatem divisam, vel indivisam multiplicatis genitorum, æquatur facto totius in eandem quantitatem multiplicatæ.

Vel; *Productum ex duabus quantitatibus, se invicem multiplicantibus, æquatur aggregato productorum à singulis multiplicata partibus, in multiplicantem ductis.*

Hinc multæ prodeunt æquationes, quales sunt, quæ sequuntur.

PRIMA ÆQUATIO.

Posita æquatio multiplicanda	$Z \sqcap A + E.$
Communis multiplicator	$\times B$
Æquatio nova producta	$ZB \sqcap BA + BE.$

SECUNDA.

Posita æquatio multiplicanda	$Z \sqcap A + E.$
Communis multiplicator	$\times Z.$
Æquatio nova producta	$Z^2 \sqcap ZA + ZE.$

TERTIA: PRIMUS CASUS.

Posita æquatio multiplicanda	$Z \sqcap A + E.$
Communis multiplicator	$\times A.$
Æquatio nova prodiens	$ZA \sqcap + A^2 + AE.$

SECUNDUS CASUS.

Posita æquatio multiplicanda	$Z \sqcap A + E.$
Communis multiplicator	$\times E.$
Æquatio nova prodiens	$ZE \sqcap + AE + E^2.$

QUARTA.

Posita æquatio multiplicanda	$Z \Pi A + E.$
Æquales multiplicatores	$\times B \Pi \times C + D.$
Æquatio nova prodiens	$ZB \Pi + CA + CE + DA + DE.$

QUINTA.

Posita æquatio multiplicanda	$Z \Pi A + E.$
Æquales multiplicatores	$\times Z \Pi \times A + E.$
Æquatio nova prodiens	$Z^2 \Pi + A^2 + 2AE + E^2.$

QUOD ETIAM SIC DEMONSTRATUR.

Ex secunda æquatione	$Z^2 \Pi ZA + ZE.$
Atqui per tertiam	$ZA \Pi A^2 + AE.$
Et per eandem	$ZE \Pi E^2 + AE.$
Ergo surgit Æquatio	$Z^2 \Pi + A^2 + 2AE + E^2.$

HORUM OMNIUM DEMONSTRATIO.

In his omnibus æquationibus vel idem multiplicator æquales quantitates multiplicat, ut in tribus primis; vel certè æquales multiplicatores quantitates etiam æquales multiplicant, ut in duabus ultimis. Quare per primum inventionis fontem productæ ab his multiplicationibus quantitates inter se æquales sunt.

PRÆCEDENTIUM ÆQUATIONUM COLLECTIO.

Quoniam à communi, vel æquali multiplicatore, diviso, vel indiviso non mutatur æqualitas.

Ergo 1°, Posito $Z \Pi A + E$, & sumpto communi multiplicatore $\left\{ \begin{array}{c} B \\ Z \\ A \\ E \end{array} \right\}$ erit $\left\{ \begin{array}{l} ZB \Pi BA + BE. \\ ZZ \Pi ZA + ZE. \\ ZA \Pi A^2 + AE. \\ ZE \Pi AE + E^2. \end{array} \right.$

Ergo 2°,

Diviso multiplicatore B in partes C + D,

seu posito $B \sqcap C + D$, & $Z \sqcap A + E$

$\times B \quad \times C + D.$

Producitur æquatio nova $ZB \sqcap + CA + CE + DA + DE.$

Ergo 3°,

Sumpto æquali multiplicatore $Z \sqcap A + E$

$\times Z \quad \times A + E.$

Producitur æquatio nova $Z^2 \sqcap A^2 + 2AE + E^2.$

SECUNDUS FONS INVENTIONIS.

Atque hæ sunt simplices æquationes, quæ propositionis fundamentalis totidem expositiones sunt, & quæ omnes à primo inventionis fonte originem ducunt, atque probationem.

Ab eis autem innumeræ aliæ per æqualium additiones, subductiones, multiplicationes, divisiones, similium radicum extractiones, necnon per diversas ejusdem rei interpretationes, ac æquipollentias deduci possunt, quæ omnes licet per dictas operationes inveniri queant, juvat tamen illas ex jam explicatis deducere, quò meliùs intelligantur, ac faciliùs memoriæ mandentur.

Sed priùs æquationes simplices verbis enunciare oportet. Itaque

Prima videlicet $ZB \sqcap BA + BE$, sic verbis concipitur.

PROPOSITIO I. *Indivisa quantitas, aliam quantitatem, quotlibet in partes divisam multiplicans, producit bimensum æquale bimensis omnibus, quæ sub indivisa quantitate, & singulis divisæ partibus continentur.*

Nam in æquatione $ZB \sqcap BA + BE$ verbis expositâ, est B indivisa quantitas, quæ multiplicans quantitatem Z, divisam in A, & E producit $\square^{um}$ ZB $\sqcap$ $\square^{is}$ omnibus, quæ sub indivisa quantitate B, & singulis divisæ Z partibus A, & E continentur, nempe $BA + BE$, ut est ostensum.

Est hæc propositio eadem cum 1ª Elementi 2di Euclidis, universaliter concepta.

Si verò ambæ quantitates propositæ secentur in quotcumque partes, & multiplicentur inter se, incidemus in quartam æquationem, nimirum $ZB \; \Pi \; CA + CE + DA + DE$, quæ sic verbis concipitur.

Si duæ quantitates, quotlibet in partes divisæ, se invicem multiplicent, productum ab ipsis bimensum æquatur aggregato bimensorum omnium, sub singulis unius partibus, in singulas alterius partes ductis, contentorum. PROPOSITIO II.

Nam in æquatione $ZB \; \Pi \; CA + CE + DA + DE$ verbis exposita, multiplicata quantitas Z secatur in partes $A + E$, multiplicans verò B, in partes $C + D$, & fit ▭um ZB, sub dictis quantitatibus Z & B comprehensum æquale aggregato ▭orum omnium, sub singulis unius partibus A, & B, in singulas alterius partes C, & D ductis contentorum, ut est ostensum.

Quod si propositæ quantitates æquales inter se fuerint, incidemus in secundam æquationem, nimirum $ZZ \; \Pi \; ZA + ZE$, quæ sic verbis concipitur.

Si quælibet quantitas in quotvis partes dividatur, æquibimensum totius æquatur bimensis omnibus, quæ sub tota, & singulis ejus segmentis comprehenduntur. PROPOSITIO III.

Nam in æquatione $ZZ \; \Pi \; ZA + ZE$ verbis exposita, quantitas Z secatur in partes A & E, cujus integræ □um, nempe ZZ æquatur bimensis omnibus, quæ sub tota Z, & singulis ejus segmentis A, & E comprehenduntur, nempe $ZA + ZE$, ut est ostensum.

Est hæc propositio eadem cum secunda Elementi secundi universaliter concepta.

Et si quantitas uultiplicans pars sit multiplicatæ, incidemus in tertiam æquationem, nimirum $ZA \; \Pi \; A^2 + AE$, vel $ZE \; \Pi \; AE + E^2$, quæ sic verbis concipitur.

Si quantitas secetur in quotcumque partes, bimensum sub tota, & una ejus parte contentum æquatur sumptæ partis æquibimenso, plus bimensis omnibus, quæ sub accepta parte, & reliquis ejus partibus continentur. PROPOSITIO IV.

Nam in æquatione $ZA \; \Pi \; A^2 + AE$, vel $ZE \; \Pi \; AE + E^2$

verbis exposita, quantitas Z secta in partes A & E, & multiplicata per unum è suis segmentis; puta A, producit bimensum Z A æquale sumptæ partis A æquibimenso A A plus ▭is omnibus, quæ sub accepta parte A, & reliquis ejus partibus E continentur, hoc est A E, ut est ostensum.

Est hæc propositio eadem cum 3a Elementi secundi, universaliter concepta.

5a, Æquatio, nempe $Z^2 \sqcap A^2 + 2AE + E^2$, sic verbis concipitur.

PROPOSITIO V. *Æquibimensum quantitatis utcumque bisectæ æquatur duobus partium æquibimensis, plus duplice bimenso sub partibus.*

Vel paulò aliter. *Binomii cujuscumque æquibimensum æquatur duobus nominum æquibimensis, plus duplice bimenso sub nominibus.*

Nam in æquatione $Z^2 \sqcap A^2 + 2AE + E^2$ verbis exposita, Z est quantitas utcumque bisecta in A & E, cujus □um nempe ZZ æquatur duobus partium A & B □is nimirum $A^2 + E^2$, plus duplice ▭o sub nominibus, hoc est 2 A E, ut est ostensum.

Est hæc propositio eadem cum quarta Elementi 2di, universaliter concepta.

SCHOLIUM.

Hinc quidem modus habetur dati cujusvis multinomii æquibimensum inveniendi, & ab ipso radicem subæquibimensam extrahendi; verùm quia methodus universalis tradi potest datum quodlibet multinomium ad quemcumque gradum attollendi, & ab ipso radicem quamlibet educendi; idcircò alibi commodiùs hac de re agetur.

Æquationum autem derivatarum series ferè talis est.

ÆQUATIO Ia DERIVATA.

I. CASUS.

Æquatio augenda	$Z^2 \sqcap + A^2 + 2AE + E^2$
Augmentum commune	$+ A^2$

Æquatio aucta	$\left\{ \begin{array}{l} Z^2 + A^2 \,\Pi + E^2 (+2A^2 + 2AE \,\Pi) \\ +2ZA \end{array} \right.$ per 3^{am}.
Surgens æquatio nova	$Z^2 + A^2 \,\Pi\, 2ZA + E^2$

II. Casus.

Æquatio augenda	$Z^2 \,\Pi + A^2 + 2AE + E^2$
Augmentum commune	$+ E^2$
Æquatio aucta	$\left\{ \begin{array}{l} Z^2 + E^2 \,\Pi + A^2 (+2AE + 2E^2 \,\Pi) \\ +2ZE \end{array} \right.$ per 3^{am}.
Surgens æquatio nova	$Z^2 + E^2 \,\Pi + 2ZE + A^2$.

Hujus Æquationis origo.

Hæc æquatio ab æquatione $Z^2 \,\Pi + A^2 + 2AE + E^2$ manifestam ducit originem, per additionem quantitatis A^2 ad utramque æquationis partem, ac transmutationem $2AE + 2A^2$: vel $2AE + 2E^2$ in æquipollentes summas $2ZA$, vel $2ZE$, ut indicat operatio, & sic verbis concipitur.

Si quantitas utcumque bisecta multiplicetur in alterutrum suum segmentum, duplum bimensi ab hac multiplicatione producti, plus alterius segmenti æquibimenso, æquatur integræ quantitatis æquibimenso, plus æquibimenso segmenti multiplicantis. Propositio VI.

Nam patet ex operatione quantitatem Z utcumque bisectam in A, & E, & per alterutrum suum segmentum A, vel E multiplicatam producere bimensum ZA, vel ZE, quod bis sumptum, unà cum reliqui segmenti æquibimenso A^2, vel E^2, æquatur totius æquibimenso Z^2, plus æquibimenso segmenti multiplicantis A^2. vel E^2.

Est hæc propositio eadem cum 7^a, Elementi 2^{di} universaliter concepta.

Quæ etiam sic demonstrari potest.

Æquatio multiplicanda	$ZA \,\Pi\, A^2 + AE$
Communis multiplicator	$\times 2$

Æquatio multiplicata $2ZA \sqcap 2A^2 + 2AE$

Augmentum commune $+ E^2$

Æq. aucta $2ZA + E^2 \sqcap + A^2 (+ A^2 + 2AE + E^2 \sqcap) + Z^2$

Surgens æquatio nova $2ZA + E^2 \sqcap + Z^2 + A^2$

Eadem argumentatione concludetur $Z^2 + E^2 \sqcap + 2ZE + A^2$, si pro æquatione multiplicanda ponatur $ZE \sqcap AE + E^2$, ut manifestum est

COROLLARIUM I.

Quoniam in æquatione præcedenti suppositum est $Z \sqcap A + E$, ergo E differentia est inter Z & A, & $Z + A$ inæquibisecta quantitas, cujus segmentorum æquibimensa, nimirum $Z^2 + A^2$ ostensa sunt æqualia duplici bimenso sub segmentis, nempe $2ZA$, plus E^2, hoc est plus æquibimenso differentiæ inter segmenta. Quare

PROPOSITIO VII. *Si quantitas inæquibisecetur, æquibimensa segmentorum æquantur duplici bimenso sub segmentis, plus æquibimenso differentiæ inter segmenta.*

APPENDIX.

Itaque æquibimensa segmentorum inæqualium alicujus quantitatis majora sunt duplice bimenso sub ipsius segmentis.

Æquantur enim huic duplici ▭° sub segmentis, unà cum □° differentiæ inter segmenta, ut est ostensum.

COROLLARIUM. II.

Quia verò cujuslibet binomii æquibimensum æquatur duobus nominum æquibimensis, plus duplice bimenso sub nominibus; & per præcedens corollarium duo nominum æquibimensa æqualia sunt duplici bimenso sub nominibus, plus æquibimenso differentiæ inter nomina. Igitur

PROPOSITIO VIII. *Cujuslibet binomij æquibimensum æquatur quadruplici bimenso sub nominibus, plus æquibimenso differentiæ inter nomina.*

QUOD

QUOD SIC PER NOTAS DEMONSTRATUR.

	Vel,
$\square\,\overline{Z+A}\,|\sqcap Z^2 + A^2 + 2ZA$	$\square\,\overline{Z+E}\,|\sqcap Z^2 + E^2 + 2ZE$
Atqui $Z^2 + A^2 \sqcap 2ZA + E^2$	Atqui $Z^2 + E^2 \sqcap 2ZE + A^2$
Ergo $\square\,\overline{Z+A}\,|\sqcap 4ZA + E^2$	Ergo $\square\,\overline{Z+E}\,|\sqcap 4ZE + A^2$

Deinde quia hîc quantitas Z utcumque bisecta in A & E ducitur in alterutrum è suis segmentis, puta A, & quadruplum ▭ⁱ ab hac multiplicatione producti, + □° alterius segmenti, nimirum $4ZA + E^2$ æquatur □° integræ quantitatis propositæ, segmento multiplicante adauctæ, nempe $\square\,\overline{Z+A}\,|$. Ideò eadèm æquatio sic verbis etiam concipitur.

Si bisecta quomodocumque quantitas, in alterutrum è suis segmentis multiplicetur, quadruplum bimensi ab hac multiplicatione producti, plus æquibimenso alterius segmenti æquatur æquibimenso integræ quantitatis propositæ, segmento multiplicante adauctæ. PROPOSITIO IX.

Est hæc propositio eadem cum 8ª Elementi 2ᵈⁱ Euclidis universaliter concepta.

Ampliùs quia in hac hyp. $Z \sqcap A + E$, igitur $Z + A \sqcap + 2A + E$, □ᵘᵐ autem bisectæ Z, segmento suo A adauctæ, hoc est $\square\,\overline{Z+A}\,|$ æquatur quadruplo bimensi sub bisecta Z, & augente segmento A comprehensi, hoc est $4ZA$, plus □° alterius segmenti, videlicet $+ E^2$. Igitur eadem propositio sic etiam interpretari potest.

Si quantitas utcumque bisecta alterutro suorum segmentorum augeatur, æquibimensum totius auctæ æquatur quadruplo bimensi sub bisecta, & sub augente segmento comprehensi, plus æquibimenso alterius segmenti.

Ampliùs quoniam ex hypothesi $Z \sqcap + A + E$, erit $Z + A \sqcap + A + A + E$, □ᵘᵐ autem æquibisectæ $A + A$, externa quantitate E adauctæ, hoc est $\square\,\overline{Z+A}\,|$ æquatur quadruplo bimensi sub æquibisegmento aucto $A + E$, sive Z, & sub æquibisegmento A comprehensi, nimirum $4ZA$, plus externæ quantitatis □°, sive $+ E^2$. Itaque eadem propositio sic etiam interpretari potest.

Si æquibisecta quantitas externâ quantitate augeatur, æquibimensum totius auctæ æquatur quadruplo bimensi sub bisecta, & augente segmento comprehensi, plus æquibimenso externæ quantitatis.

Et sic una eademque propositio multas admittit interpretationes.

COROLLARIUM III.

Quia verò æquibimensum à dimidio alicujus quantitatis æquatur quartæ parti æquibimensi quod à tota sit, (nam verbi gratiâ, $\frac{Z}{2} \times \frac{Z}{2} \sqcap \frac{ZZ}{4}$) & ostensum est in præcedenti corollario, inæquibisectæ quantitatis æquibimensum æquari quadruplici bimenso sub segmentis, plus □° differentiæ segmentorum. Igitur

PROPOSITIO X.

Æquibimensum à dimidio alicujus quantitatis inæquibisectæ æquatur bimenso sub segmentis, plus quarta parte æquibimensi à differentia segmentorum, sive quod idem est plus æquibimenso à semidifferentia segmentorum.

Ut si Z + A sit inæquibisecta quantitas, cujus segmentorum Z & A differentia sit E, fiet $\square\, \overline{\tfrac{1}{2}Z + \tfrac{1}{2}A} \sqcap ZA + \tfrac{1}{4}E$; ut est ostensum. Quod etiam sic paulò aliter interpretari potest.

Si quantitas aliqua æquibisecetur, & inæquibisecetur, æquibimensum dimidiæ æquabitur bimenso sub segmentis inæqualibus comprehenso, plus æquibimenso intersegmenti vel semidifferentiæ segmentorum inæqualium, ut probatum est.

Est hæc propositio eadem cum 5ª. Elementi 2di universaliter concepta.

CONSECTARIUM I.

Ex probatis manifestum fit bimensorum sub bisectæ quantitatis partibus comprehensorum maximum esse, quod sub ejus medietatibus continetur.

Nam bimensa sub segmentis inæqualibus contenta semper assumunt intersegmenti, sive semidifferentiæ æquibimensum, ut dimidiæ ejusdem quantitatis æquibimenso coæquari valeant, ut vidimus.

CONSECTARIUM II.

Æquatio multiplicanda $\square\ \overline{\frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}A}\ \sqcap\ ZA + \frac{1}{4}E^2$

Communis multiplicator $\times\ 2$

Æqu. multiplicata $2\ \square\ \overline{\frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}A}\ \sqcap\ 2\,ZA + \frac{1}{2}E^2$.

Augmentum commune $+ \frac{1}{2}E^2$

Æqu. aucta $2\ \square\ \overline{\frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}A} + \frac{1}{2}E^2\ \sqcap + 2\,ZA + E^2$

Atqui $2\,ZA + E^2\ \sqcap\ Z^2 + A^2$

Ergo surgens æquatio $\left\{ \begin{array}{l} 2\ \square\ \overline{\frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}A} + \frac{1}{2}E^2 \\ \sqcap + Z^2 + A^2 \end{array} \right.$

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si quantitas aliqua æquibisecetur, & inæquibisecetur, æquibimensa segmentorum inæqualium simul sumpta duplicia sunt æquibimensi à dimidia, & æquibimensi ab intersegmento sive à semidifferentia segmentorum inæqualium. PROPOSITIO XL.

Nam quantitas Z+A æquibisecatur in $\frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}A$, ac inæquibisecatur in partes Z & A, & fiunt æquibimensa segmentorum inæqualium Z & A, nempe $Z^2 + A^2$ simul sumpta duplicia $\square^i$ à dimidia, nempe $\square\ \overline{\frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}A}$, & $\square^i$ à semidifferentia segmentorum inæqualium, hoc est $\frac{1}{4}E^2$, ut probatum est.

Est hæc æquatio eadem cum 9ª Elementi 2di, universaliter concepta.

ÆQUATIO II. DERIVATA.

Æquatio interpretanda	$\left\{ \begin{array}{l} \Box\ \overline{A+E}\,\vert\ \Pi + A^2 \\ + 2AE + E^2 \end{array} \right.$
Interpretatio per multiplicationis opus	$\{\ 2AE + E^2\ \Pi\ \overline{2A+E} \times E$
Surgens æquatio nova	$\left\{ \begin{array}{l} \Box\ \overline{A+E}\,\vert\ \Pi + A^2 \\ + \text{▭}\ \overline{2A+E} \times E \end{array} \right.$

ET SIC VERBIS CONCIPITUR.

PROPOSITIO XII. *Si æquibisecta quantitas augeatur, æquibimensum dimidiæ, plus bimenso sub tota aucta, & sub augmento æquatur æquibimenso dimidiæ auctæ.*

Nam ad æquibisectam A + A addatur augmentum + E, ut fiat trisecta A + A + E, erit ▭ sub tota aucta A + A + E, & sub augmento E comprehensum, nimirum ▭ $\overline{2A+E} \times E$ plus □° mediæ, hoc est + A^2 Π □° æquibisegmenti aucti, nempe □ $\overline{A+E}\,\vert$, ut est ostensum.

Est hæc propositio eadem cum 6ª Elementi 2ᵈⁱ universaliter concepta, quæ etiam sic interpretari potest.

Si bisecta quomodocumque quantitas alterutrius è suis segmentis dimidio multetur, æquibimensum residui æquabitur ablatæ partis æquibimenso, plus bimenso sub integra bisecta, & sub ejus indivisa parte comprehenso.

Nam bisecta 2A + E multetur dimidio segmenti 2A, itaut reliquum sit A + E, hujus residui æquibimensum, nempe □ $\overline{A+E}\,\vert$, æquatur bimenso sub integra quantitate 2A + E, & sub ejus indivisa parte E comprehenso, nimirum ▭ $\overline{2A+E} \times E$, plus æquibimenso ablatæ partis, videlicet + A^2, ut est ostensum, hæc eadem propositio sic etiam interpretari potest.

Si sint duæ inæquales quantitates (A, & A + E) □ᵘᵐ *minoris* A^2, + ▭° *sub ambarum summa, & differentia* (+ $\overline{2A+E} \times E$) *æquatur* □° *majoris*, (*nempe* □ $\overline{A+E}$.)

ÆQUATIO III. DERIVATA.

I. CASUS.

Ex quinta æquatione $\square\,\overline{Z + A}\,|\ \sqcap + Z^2 + A^2 + 2ZA$

Addatur utrimque $+ E^2$

Summa erit $\begin{cases}\square\,\overline{Z + A}\,| + E^2\ \sqcap + Z^2 + A^2 \\ (+ 2ZA + E^2 \sqcap) + Z^2 + A^2\end{cases}$

Ergo surgit æquatio $\square\,\overline{Z + A}\,| + E^2\ \sqcap\ 2Z^2 + 2A^2$

II. CASUS.

Ex quinta æquatione $\square\,\overline{Z + E}\,|\ \sqcap Z^2 + E^2 + 2ZE$

Addatur utrimque $+ A^2$.

Summa erit $\begin{cases}\square\,\overline{Z + E}\,| + A^2\ \sqcap + Z^2 + E^2 \\ (+ 2ZE + A^2\ \sqcap) + Z^2 + E^2\end{cases}$

Ergo surgit æquatio $\square\,\overline{Z + E}\,| + A^2\ \sqcap + 2Z^2 + 2E^2$

QUOD SIC ENUNCIATUR.

Si æquibisecta quantitas augeatur, æquibimensum totius auctæ, plus æquibimenso augmenti, duplum est æquibimensi dimidiæ auctæ, & æquibimensi dimidiæ.

Nam $A + A$ est æquibisecta quantitas, quæ augetur quantitate E, ita ut tota aucta fiat $(A + A + E \sqcap) Z + A$, & cujus $\square^{um}$, nempe $\square\,\overline{Z + A}\,|, + \square^o$ augmenti E, nimirum $+ E^2$, æquatur duplo $\square^i$ à dimidia A, hoc est $+ 2A^2$, & duplo $\square^i$ à dimidia aucta, quod est $2Z^2$, ut est ostensum.

Est hæc propositio decima 2^{di} Elementi, universaliter concepta.

SCHOLIUM.

Quemadmodum ex quantitatum divisionibus, mutuisque inter se multiplicationibus primæ, & facillimæ æquationes ducerent originem satis superque dictum est. Nam si omnia, quæ ad hanc materiam spectant, vel sola corollaria, quæ hinc deduci possunt, hunc in locum conge-

rere vellem, opere in immensum pravè crescente, admodum præposterâ methodo uterer; multa enim tam ex arithmetica quàm geometria, de quibus nondum egimus, mutuanda sæpiùs forent ad plurimas res, quæ ex jam dictis pendent, concludendas. Quamobrem, ut hoc vitium fugiamus, generalia generaliter tractabimus, contenti hoc in loco æquationum fundamenta jecisse, quibus positis facilè erit posteà in quocumque quantitatis genere versantes ostensarum æquationum argumentationibus uti, similesque multas ad harum instar efformare.

Jam verò ut generalis hæc doctrina in particularibus usum habere possit, sive ut generalis hujus doctrinæ usus numeris, & magnitudinibus accomodari queat, numerorum figurarumque proprietates cousiderando, quam una quæque multiplicationem, vel divisionem ferat, investigabimus; & concepta per traditas æquationes de numeris aut magnitudinibus theoremata vel problemata, prout rei de qua agetur natura, conditioque postulabit, enunciabimus.

Verbi gratiâ, si parium & imparium numerorum naturam considerantes sumamus quodcumque numericum æquibimensum, cujus radicem augeamus minimo augmento, sive ipsâ unitate, fiet binomium quoddam, cujus æquibimensum constabit duobus partium æquibimensis, plus duplice bimenso sub partibus, sicut conclusum est propositione 5^{a}. sed una ejus pars est unitas; Igitur dicti binomij $\square^{um}$ constat assumpto $\square^{o}$, plus ipsius unitatis $\square^{o}$, plus duplice $\square^{o}$. sub unitate, & altera ejus parte, nimirum assumpti $\square^{i}$ radice, hoc est plus duplo radicis assumpti $\square^{i}$, quoniam unitas non multiplicat. Duplum autem radicis numericæ, sive duplum numeri alicujus numerum parem constituit, cui addita unitate, sive $\square^{o}$ unitatis impar efficitur; Addito igitur ad quodlibet numericum $\square^{um}$ impari numero, constante ex duplo ipsius radicis, & unitate, $\square^{um}$ numericum proximè sequens generatur, quoniam assumpti $\square^{i}$ radix minimo augmento, sive ipsa unitate crevit.

Jam ſi primum □^{um} numericum, hoc eſt unitas, accipiatur, eique apponatur primus poſt unitatem impar numerus, nimirum 3, conſtans ex duplo radicis □^{i} unitatis, ſive binario, plus unitate, formatur □^{um} numericum proximè ſequens, videlicet 4, cujus radix 2 eſt unitate major radice primi □^{ti} numerici, nempe 1, & eo deinceps progreſſu. Itaque

Æquibimenſa numerica continua imparium additione generantur, & quodlibet eorum tot imparibus numeris conſtat, quot unitatibus radix ipſius componitur.

Nam 1um □^{um} numericum, nempe unitas, cujus radix eſt etiam 1, conſtat unico impari, 2um □^{um} numericum, cujus radix eſt binarius, duobus imparibus numeris conſtat, qui ſunt 1 + 3, & ſic reliqua □^{a} numerica per continuam imparium additionem ſucceſſive generantur.

Ex hac □^{orum} numericorum proprietate colligitur modus inveniendi □^{um} numericum, cum quo datus quivis impar numerus □^{um} numericum efficiat.

REGULA I.

Ex dato impari numero auferatur 1, □^{um} ex reliqui dimidio in ſe multiplicato, adjunctum dato impari □^{um} efficiet.

Ut manifeſtum ſit ex deſcripta □^{orum} numericorum generatione.

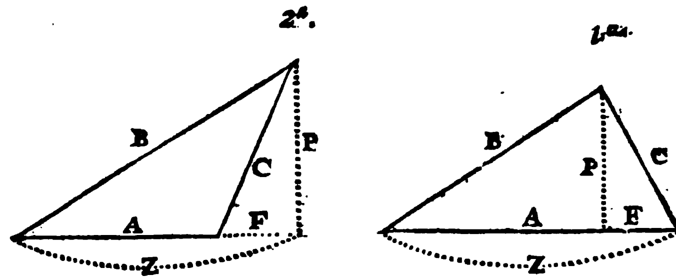
Viciſſim reperiemus □^{um} numericum, à quo datus quivis impar numerus ſubſtractus relinquat □^{um} numericum.

REGULA II.

Ex dato impari numero dematur 1, & reliqui numeri dimidio adjiciatur 1, fiet radix □^{ti} quæſiti, à quo nempe datus impar numerus ablatus relinquet □^{um}.

Ut manifeſtum ſit ex deſcripta □^{orum} numericorum generatione.

Sic plura corollaria Arithmetica à poſitis principiis deduci poſſent, ſi in cæteras numerorum proprietates inquirere vellemus.



Si verò geometrica contemplantes sumamus, verbi gratiâ Δ^{um} quodvis B C Z, vel B C A, & ab uno ex ejus $\angle^{is}$ demittatur $\perp^{um}$ P.

Quoniam 1° cadente intra Δ^{um} $\perp$° P in 1ª figura recta Z bisecatur in partes A & E, fiet $Z^2 + A^2 \,\Pi\, 2ZA + E^2$, ut conclusum est propositione 6^a, & utrimque addito $+ P^2$ habebitur:
$+Z^2 (+ A^2 + P^2 \,\Pi) + B^2 \,\Pi\, 2ZA (+E^2 + P^2 \,\Pi) + C^2$: unde nova surgit æquatio $+ Z^2 + B^2 \,\Pi + 2ZA + C^2$.

2° Cadente extra Δ^{um} $\perp$° P, ut in 2^a figura, quoniam recta Z, bisecatur in partes A, & E fiet per 5^{am}. propositionem $Z^2 \,\Pi + A^2 + 2AE + E^2$, & utrimque addito $+ P^2$ oritur $(Z^2 + P^2 \,\Pi) + B^2 \,\Pi + A^2 + 2AE (+E^2 + P^2 \,\Pi) + C^2$, unde nova surgit ęquatio $+ B^2 \,\Pi + C^2 + A^2 + 2AE$.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

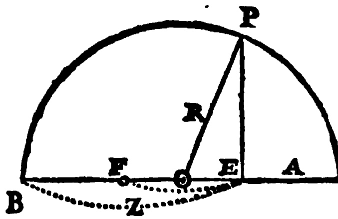
IN 1° CASU.

In Δ^{lis} acutiangulis $\square^a$ laterum $\angle^{um}$ acutum continentium æquantur $\square$° lateris $\angle^{um}$ acutum subtendentis, plus duplice ▭° sub uno laterum, circa $\angle^{um}$ acutum existentium, quod à $\perp$° bisecatur, & sub segmento prope $\angle^{um}$ acutum adjacente.

IN 2° CASU.

In obtusiangulis Δ^{lis} $\square^{um}$ lateris $\angle^{um}$ obtusum subtendentis æquatur summæ $\square^{orum}$ à lateribus $\angle^{um}$ obtusum continentibus, plus duplice ▭° sub uno laterum circa $\angle^{um}$ obtusum existentium, in quod nempe cadit $\perp^{um}$, & sub ejusdem lateris continuati segmento, inter obtusum $\angle^{um}$ & $\perp^{um}$ intercepto.

Aut



Aut si ad circuli naturam attendentes, qui sit, verbi gratiâ OZP, à quovis ejus circumferentiæ puncto P demittamus ⊥^{um} PE, & ducamus OP.

Quoniam recta Z + A inæquibisecatur in puncto E, & æquibisecatur in puncto O propter circulum; Ideò, ut suprà conclusum est, (□^{um} radii BO Π) □^{o} radii OP Π ▭^{o} Z×A (+ □^{o} intersegmenti OE Π) $\frac{1}{4}$ E^{2} Π $\frac{1}{4}$E^{2} + □^{o} ⊥^{li} PE, & ablato utrimque $\frac{1}{4}$ E^{2} relinquitur ▭ Z×A Π □^{o} ⊥^{li} PE.

QUOD SIC ENUNCIATUR.

In quovis circulo quadratum perpendiculi ab aliquo ejus circumferentiæ puncto in diametrum demissi æquatur rectangulo sub segmentis diametri, à dicto ⊥^{o} *factis.*

Vel quod idem est; *In quovis circulo perpendiculum ab aliquo ejus peripheriæ puncto in diametrum demissum medium est proportionale inter diametri segmenta à dicto* ⊥^{o} *facta.*

Hoc autem in circulo accidit ob insitam, & peculiarem ejus proprietatem, quâ rectæ lineæ à centro ad circumferentiam ductæ inter se æquales sunt; nam ideò recta demissum perpendiculum & intersegmentum connectens radius fit, sive semidiameter circuli. Quapropter □^{um} semidiametri, minus □^{o} intersegmenti semper æquabitur □^{o} dimissi ⊥^{li}, sive ▭^{o} sub inæqualibus diametri segmentis comprehenso, ut patet ex probatis.

Hinc facile est quadratum exhibere, dato rectangulo æquale.

REGULA.

Descripto super summam laterum datum ▭^{um} continentium semicirculo, à puncto conjunctionis laterum ad ambitum descripti semicirculi excitetur ⊥^{um}, & erit hujus ⊥^{li} □^{um} æquale dato ▭^{o}, ut manifestum fit ex probatis.

Alia multa his similia, si temerè exspatiari fas esset; afferre possem, quorum probationes à tradita hoc in capite doctrina præcipuè dependent, sed quia etiam præноscendis quibusdam geometricis rebus innituntur, quas hactenus demonstrasse minimè conveniens fuit, ideò talibus in propria loca rejectis pergam ad reliqua. Interim abundè nunc satisfactum reor maximè necessariis æquationum principiis.

CAPUT QUARTUM.

De Geometricis Definitionibus.

DEFINITIO I.

Punctum est id quod in magnitudine indivisibile existit: vel potiùs, *Est magnitudinis principium, atque terminus.*

DE NATURA PUNCTI.

OBJECTUM quod in quantitate continua minimum apprehendit intellectus, illud punctum est, omni magnitudine carens. Nam cùm magnitudini in primis competat ut sit divisibilis, puncti verò natura talis sit ut divisionem non admittat, manifestum est punctum nullam ea de causa magnitudinem obtinere.

Sed quamvis punctum magnitudine careat ab ipso tamen fluit omnis magnitudo, nam à puncto linea exoritur, ex illa superficies emergit, ab hac tandem corpus generatur; Unde continui procreatio velut aliqua puncti sese expandentis, explicantisque diffusio concipi potest: Atque sic punctum quasi semen est, quod omnes omnium quæ ab illo proficiscuntur magnitudinum species virtute complectitur. Quoniam verò nulla datur magnitudo, quæ in infinitum augeri non possit, ideò puncti potentiam infinitam esse necessariò relinquitur.

Prætereà punctum continuitatis est causa in magnitudine, firmissimum enim vinculum est quo partes hujusce quantitatis quàm arctissimè inter se cohærentes uniuntur: Et quia partes illæ, quantæcumque sint, infinitas sectio-

nes recipiunt, ut ex earum generatione apparet, infinitam iterum puncti virtutem inde concludere fas est.

Cur autem infinitæ divisibilitatis causa, ut antè continuitatis, puncto tribuatur, ratio est in promptu; nam quod secatur divisibile tantùm est in illis terminis, atque vinculis quibus ipsum continetur, copulaturque; sed punctum quantitatis continuæ vinculum est, ac infinita in quovis quanto (ut ex magnitudinis productione clarè colligitur) reperiuntur puncta; punctum igitur infinitæ divisibilitatis causa est.

Punctum in aliquibus quadrat cum unitate, in aliquibus discrepat; nam ut illa est principium omnis numeri, ita punctum est principium omnis magnitudinis; sed in hoc discrimen est quod unitas est pars numeri, punctum verò quamvis initium sit finisque lineæ, non tamen est pars lineæ. Differunt etiam in eo quod unitas nullam positionem aut situm postulet, punctum verò positionem atque situm habeat in magnitudine.

Punctum est quoque simile instanti in tempore, est enim concipiendum illud ut individuum.

DE USU PUNCTI.

Principiorum omnium cognitio adeò necessaria, utilisque est in earum rerum tractatione quarum principia sunt, ut iis ignoratis, vel perperam intellectis nulla queat esse reliquorum scientia. Punctum verò fœcundissimum illud magnitudinis principium tanti momenti est in rebus mathematicis, ut in illarum universa conquisitione nihil aliud ferè spectetur quàm punctum: Circuli centrum quod punctum est omnium primum quæritur; magnitudines, cujuscumque generis illæ sint, in punctis angularibus colliguntur; Eorumdem motu infinitæ varietatis lineæ generantur, quæ posteà punctis terminantur, secantur, atque dividuntur, ut punctum quod in continui generatione omnia efficit, etiam in operationibus quæ circa continuum fiunt instar omnium sit, totiusque geometricæ speculationis imaginem repræsen-

tet. Quisquis igitur in omnibus punctum assequi poterit, is à scopo nusquam aberrabit.

DEFINITIO II.

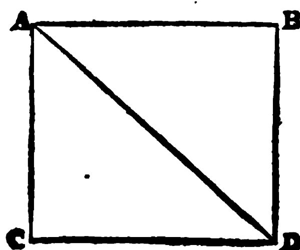
Linea est magnitudo solius longitudinis particeps.

DE NATURA LINEÆ.

PRIMA magnitudinum species hîc definitur, quæ linea vocatur; hæc uno tantùm modo divisibilis est, nimirum secundum longitudinem. Nam quia magnitudo per extensionem suam divisibilis est, ut patet, tot modis illa dividi poterit, quot erunt in ea varii extensionum modi; linea autem unico tantùm modo extenditur, nimirum in longitudinem; ergo secundum solam longitudinem divisibilis erit.

Produci verò concipitur motu puncti; nam si punctum moveretur, ac relinqueret sui vestigium illud esset longum propter motum, non tamen latum; quia punctum, à quo procedit, omnis expers est extensionis. Non igitur sicut ex accumulatis unitatibus fit numerus, ita quoque ex additis punctis fit linea, sed ex ipsorum fluxu continuo, atque in hoc differt continuum à discreto, quod continuum infinitè dividatur, neque ad punctum unquam deveniatur, ut in discretis ad unitatem.

Porrò puncti motus, à quo lineam generari diximus, vel simplex est, vel compositus. Simplicem motum voco qui per unicam simplicemque rei motionem peragitur, vel peragi potest, ut quando punctum aliquod, vel una linea altero extremorum fixo movetur in rectæ, circularisve procreatione, ibi motus est simplex, quia per unam eamque simplicem rei lationem fit. Et quamvis concipere possimus diagonalem ex duobus laterum suorum permixtis motibus ortam esse, quia tamen alio modo, hoc est simplici puncti motione diagonalis illa describi potest, motus per quem generabitur non dicetur mixtus sed tantùm simplex.



Ut si linea A B parallelismum ubique servans cum linea C D, ad ipsam æquabili motu feratur per rectam A C, & eodem tempore, atque etiam æquabili motu punctum A feratur versus punctum B, diagonalis A D, quam punctum A describet, pendebit quidem à duobus motibus, videlicet à motu puncti A, sive lineæ A C, versu. lineam B D, & à motu rectæ A B in rectam C D. Verùm quia illi duo motus uniformes sunt, nimirum recti, latio puncti A ad punctum D, quæ etiam rectà fit, simplex dicetur; neque enim in hac diagonalis generatione motus alius advertitur quàm rectus, quem in plures dividi imaginamur, sive qui plurium instar consideratur. Aliquando tamen in simplicis lineæ generatione duos motus inter se diversos numeramus, ut in recta linea à rotis curruum descripta, quæ à motu circulari circa rotarum axem, & à motu recto secundum longitudinem viæ per quam rotæ feruntur, dependet. Verùm quia illi vel similes motus compositi ad linearum naturâ suâ simplicum generationem necessarii non sunt, cùm ad hoc sufficiat aliqua simplex motio, hujusmodi lineæ simplici tantùm motu generari dicentur.

Plurimi autem alii motus reperiuntur quos sic ad simplicem formam reducere est impossibile, verbi gratiâ, motus quo linea spiralis describitur ita compositus est ex recto atque circulari, ut neuter solus ad hanc lineam generandam sufficiat: sic motus quo quadratrix describitur ex recti circularisque motus permixtione exsurgit. Tales itaque lineæ ex pluribus, iisque ad earum generationem necessariis motibus ortæ, compositæ sunt.

DE USU LINEÆ.

Linearum usus tantus est ut per ipsas omnia geometriæ problemata analyseos studio solvi possint, cognitis enim aliquibus in figura lineis ipsa statim nota evadit, cujus rei ratio est quod linea superficiei sit terminus, & ab ipsius

motu superficies integra nascatur, ut mox videbimus; Et verò quid linea simplicius, quid quod animo repræsentari facilius sit invenias.

DEFINITIO III.

Extrema sive fines lineæ sunt puncta.

EXPLICATIO.

QUIA linea est quidam puncti fluxus, ac velut continuatio, si concipiatur punctum moveri, necesse est ubi motus incipit, ibi lineam ortum habere; ubi verò quiescit ibi lineam desinere: unde linea punctis terminari jure optimo dicitur.

ANNOTATIO.

Omnis linea, sicut omnis magnitudo finita est actu, nec ulla magnitudo consideratur à Mathematicis nisi quatenus est terminata, nihil enim quod infinitum est vel scientiâ colligi, vel mente comprehendi potest. Unde cùm linea infinita vocatur intelligitur indeterminata, & quousque libuerit producibilis.

DEFINITIO IV.

Recta linea est quæ per indeflexum à punctis extremis transitum ducitur; vel *quæ æqualiter intra puncta sua distenditur.* Sive etiam *quæ tota in punctorum intervallo continetur, necnon cujus intermedia puncta extremis obsistunt.*

EXPLICATIO.

LINEA per indeflexum à punctis extremis tramitem duci, sive æqualiter intra puncta sua distendi, necnon in punctorum intervallo tota contineri tunc dicetur quando talem inter illa situm obtinebit, ut nulla sui parte huc vel illuc vergendo ab ipsorum altitudine recedat, hoc est ut nulla ejus pars punctis extremis altior aut depressior evadat, sed omnes ejus partes unam cum ipsis altitudinem obtineant.

DE NATURA LINEÆ RECTÆ.

Linea vel indeflexè, sive ex æquo punctis suis interjicitur, vel deflexè sive ex inæquali.

A———B Unde duæ nascuntur linearum species, recta videlicet ut linea A B, quæ ex æquo. Flexa sive curva ut C D, quæ ex C D inæquali, intra puncta sua distenditur.

Sed linearum differentia meliùs innotescet, si ad ipsarum generationem attenderimus. Cùm enim fluxu puncti fieri concipiatur linea, si punctum illud æquali, & inflexibili motu ad aliud punctum fluat, generabitur recta, si uniformi, & æquali etiam motu, sive æquidistanter circa unum tantùm feratur, orietur circularis; si motu inæquali vel composito vagetur, producentur reliquæ curvæ. Atque hinc patet quod recta & circularis in alias species dividi nequeant, cùm oriantur ex motus uniformitate, & æqualitate, quæ nullam in se divisionem mutationemve recipit, cæteris propter motus difformitatem & inæqualitatem diversas in species abeuntibus. Patet etiam intra rectam, & circularem hoc tantùm inesse discriminis quod recta intra duo puncta distendatur, circularis verò circa unum, & cùm ambæ solæ immutabilis sint invariabilisque naturæ, hoc est cùm pluribus modis habere se nequeant illæ solæ pro perfectissimis habendæ sunt.

Ex hac sic explicata definitione:

COLLIGITUR 1°. *Rectam solam per punctorum suorum distantiam transire.*

Nam cùm illa sola propter indeflexum à punctis extremis transitum, qui neque magis, neque minus recipit, certum quemdam inter extrema situm obtineat (circularis enim circa unicum fertur, cæteræ verò inter extrema vagantur) sequitur quod illa sola transire debet per certum aliquod, atque præfinitum spatium; tale autem inter extrema præter ipsam distantiam aliud nullum existit; recta igitur per punctorum distantiam transibit.

COLLIGITUR 2°. *Rectam punctorum extremorum distantiæ esse æqualem.*

Quia enim per ipsam punctorum extremorum distantiam ducitur, & cùm ipsa terminatur necesse est ipsi fieri æqualem, aliàs locus locato non esset æqualis.

COLLIGITUR 3°. *Rectas omnes à punctis æqualiter distantibus ductas invicem æquales esse.*

Supponuntur enim æquales distantiæ, quibus rectas coæquari jam probatum est.

COLLIGITUR 4°. *Rectam brevissimam esse ab uno puncto ad aliud extensionem.*

Distantiam enim brevissimum illud spatium dicimus quod inter res amotas est interjectum; quare cùm recta per hoc spatium ducatur, erit brevissima quæ dari possit ab uno puncto ad aliud extensio.

COLLIGITUR 5°. *Duas rectas intra duo puncta duci non posse.*

Nam ambæ per eandem distantiam, sive per idem spatium transirent, ideoque una & eadem foret linea.

COLLIGITUR 6°. *Duas rectas spatium non continere, nec in duobus punctis sibi occurrere.*

Nam si primum efficerent in extremis sibi necessariò occurrerent, si secundùm earum quædam partes in extremis etiam sibi occurrerent, atque ideò duæ rectæ inter duo puncta duci possent, quod est contra præcedens axioma.

COLLIGITUR 7°. *Rectam punctorum distantiam metiri.*

Mensura enim cujusque rei debet esse stata atque determinata, quare cùm sola recta talis sit, ipsa sola punctorum distantiam metietur.

COLLIGITUR 8°. *Rectam intra duo puncta ordinari.*

Ordinatum enim dicitur quod uno tantùm modo se habet, sive quod pluribus modis fieri nequit, quare cùm recta ad unam tantummodo intra duo puncta positionem determinetur, necesse est ipsam intra duo puncta ordinari.

COROLLA-

COROLLARIUM.

Si duo plana se mutuo secuerint communis eorum sectio est recta linea. 3. prop. 11.

DEMONSTRATIO.

Nam aliàs à duos buacceptis in intersectione punctis duci possent duæ rectæ in duobus planis se intersecantibus, atque sic duæ rectæ intra duo puncta duci possent, vel duæ rectæ spatium comprehenderent, quod est contra probata.

COLLIGITUR 9°. *Duarum rectarum ab extremis alicujus rectæ exeuntium, & supra vel infra ipsam in unum punctum coincidentium aggregatum majus esse rectà supra, vel infra quam illæ concurrunt.*

Nam recta linea transit per brevissimam viam quæ ab uno puncto ad aliud tendit; Ideoque cæteræ viæ, inter illa duo puncta interjectæ, brevissimâ longiores sunt, & consequenter duæ nominatæ lineæ, quæ per has longiores vias ducuntur, & quæ distantiis suis coæquantur, rectâ lineâ per brevissimam viam transeunte majores sunt.

PETITIONES *sive* POSTULATA.

Quoniam recta linea simplicissimo puncti, inter duo extrema rectà, sive æqualiter fluentis, & per eorum distantiam transeuntis, motu naturaliter, & sine arte generatur, illeque directus, & omnis inclinationis expers puncti motus inartificialiter etiam per infinitam distantiam continuari potest. Ergo jure optimo

I.

Postuletur ut à quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere concedatur.

II.

Et rectam terminatam in continuum rectà producere.

SCHOLIUM.

De cæteris lineis, videlicet de curvis, si circularem

excipias, idem peti non poteſt; illæ enim per motus compoſitos generantur; ideoque ſine artis præceptis deſcribi nequeunt.

DE USU LINEÆ RECTÆ.

Cùm in magnitudinum comparationibus omnia ferè ad æqualitatem revocentur, rectitudo autem æqualitas quædam ſit, patet rectæ lineæ uſum eſſe immenſum.

DEFINITIO V.

Superficies eſt magnitudo longa, & lata, profunditate, vel altitudine carens.

SUPERFICIES ſecunda magnitudinis ſpecies eſt, propter ſuam longitudinem, & latitudinem duobus modis diviſibilis. Produci autem concipitur motu lineæ; nam ſi linea moveretur ſecundum ſuam longitudinem, ac relinqueret ſui veſtigium, illud eſſet longum propter motum, ac etiam latum, quia linea, à qua motus procedit, extenſionem habet. Unde quemadmodum ex puncti fluxu in continuum exit linea, ita ex lineæ in tranſverſum ductu oritur ſuperficies. Et quia patet quod totidem ſitus intra ſuas lineas ſuperficies habere poſſit quàm linea intra puncta, manifeſtum eſt totidem modis dividi debere. Unde duæ erunt ſuperficierum ſpecies, recta videlicet & curva.

DE USU SUPERFICIEI.

Non ſecus ac cognitis quibuſdam planorum lineis in figurarum ipſarum cognitionem devenitur, ita etiam cognitis quibuſdam ſolidorum ſuperficiebus ipſa ſolida nota fiunt, cujus rei eadem quæ de lineis ratio eſt, ſuperficies enim ſolidorum terminus eſt, & ex ipſius motu ſolida generantur, ut cùm eò perventum erit, docebimus.

DEFINITIO VI.

Extrema, ſive fines ſuperficiei ſunt lineæ.

EXPLICATIO.

IDEM de linea vidimus, nam quia motu lineæ ſuperficies oritur, neceſſe eſt ubi lineæ motus incipit, ibi

ſuperficiem incipere, ubi verò quieſcit ibi ſuperficiem deſinere; quamobrem ſuperficies lineis terminari jure merito dicitur.

DEFINITIO VII.

Plana ſuperficies eſt quæ per indeflexum à lineis extremis tranſitum ducitur, vel quæ æqualiter intra ſuas lineas porrigitur, vel etiam quæ tota inter extremas lineas continetur.

HÆc definitio rectæ lineæ definitioni eſt analoga; Ideoque ex antedictis eſt intelligenda, ſolummodo notandum eſt hanc ſuperficiem perſæpè vocari ſimpliciter planum.

ANNOTATIO.

Sicut ſuperiùs duas rectas lineas intra duo puncta duci non poſſe probavimus, ita hîc per eandem rationem oſtendetur duo plana intra duas lineas duci non poſſe, nam etiam per eandem diſtantiam tranſirent, ideoque unum ac idem foret planum quandoquidem planum intra ſuas lineas non ſecus ac recta linea intra ſua puncta æqualiter extenditur; unde neque duo plana ſpatium comprehendunt, neque in duobus locis ſibi occurrunt, hoc enim ex probatis ſequitur. Generaliter quicquid de rectis lineis propter æqualem inter extrema porrectionem concluſum eſt, idem hîc de planis, mutatis tantùm nominibus concludi poterit.

DEFINITIO VIII.

Angulus eſt duarum pluriumve ejuſdem ſpeciei magnitudinum, ad unum punctum collectarum, & non in continuum jacentium breviſſima remotio, ſive diſtantia.

DE ANGULI NATURA.

HÆc definitio anguli naturam declarat, in qua cauſæ, à quibus pendet, explicantur; materialis, ſunt

duę, vel plures magnitudines, ad unum punctum collectæ, sive ex eodem puncto exeuntes, formalis, ipsarum remotio; conditio autem necessaria, est ipsarum magnitudinum indirecta positio, sive unius magnitudinis ad alteram inclinatio. Quod si magnitudines illæ sint duæ lineæ, comprehensus ab eis angulus, planus vocabitur; solidus verò si comprehendatur ab uno, vel pluribus superficiebus, collectionis punctum ambientibus; & unâ quidem, ut est verticalis coni angulus, pluribus verò, ut sunt reliqui anguli solidi.

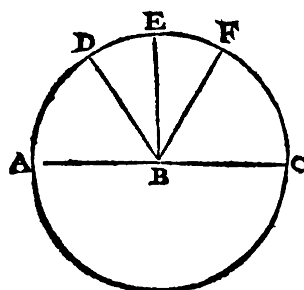
Ut igitur ex duabus, verbi gratiâ, lineis angulus aliquis efformetur, debent illæ lineæ in unum punctum desinere, & sibi mutuo indirectè occurrere, alioquin si rectà concurrerent, tunc duabus illis lineis in unam coalescentibus angulus evanesceret.

Per brevissimam autem linearum remotionem angulus distinguitur ab illa remotione, qua laterum partes inter se distant, illa etenim remotio alia, atque alia evadit crescentibus longitudine lineis, cùm contra extensione laterum nulla angulis augmẽtatio, aut diminutio accedat.

Hæc autem definitio intelligenda est ad modum axiomatis, quo recta linea dicitur brevissima ab uno puncto ad aliud extensio; tunc enim intelliguntur illa puncta certo à se invicem distare intervallo; quo posito cùm infinitæ lineæ inter illa puncta duci possint, unæ aliis longiores, brevissima, quæ duci potest, recta vocatur. Pari ratione cùm duæ lineæ se se contingentes statim à separatione inter se distent, sive aliquantulum removeantur, ut manifestum est ex separationis notione, hoc posito quia illa remotio in infinitum augeri potest crescentibus longitudine lineis (nam quantò magis producuntur tantò magis dilitantur) illa minima remotio, quæ inter ipsas reperitur, angulus vocatur, non minima remotio simpliciter, quæ dari non potest, quia quantumvis exigua ponatur semper erit divisibilis, ut neque recta linea brevissima extensio simpliciter dicitur, ad quam brevissimam extensionem etiam perveniri nequit, sed brevissima intra duo puncta extensio. Atque hinc manifestum est angulum ad

punctum contactus existere, quia hoc in loco minimùm removentur lineæ, quæ angulum constituunt.

Sed ut illa plenioris expositionis lucem accipiant operæpretium est anguli plani generationem, ortumque declarare, sic autem se habet.



Sint duæ lineæ AB,& CB contingentes se in puncto B, & primò jaceant in continuum. Deinde AB minimũ recedat ab illa directa positione, ita ut AB fiat DB, per minimam illam deflexionem lineæ DB, à directo tramite lineæ CB, qui est AB generabitur angulus DBC; & si adhuc moveri intelligatur AB, quæ jam facta est DB, itaut paulatim perveniat ad EB, deinde ad FB, & sic continuetur moveri donec ipsam CB attigerit, manifestum est omnes angulos, qui à rectis lineis fieri possunt, hac ratione orituros, qui eò minores continuè evadent quò magis DB ab AB recedet, hoc est quò magis DB à directa cum BC positione deflectet. Atque hic est verus anguli ortus, ex quo singulæ ejus proprietates elucescunt.

Nam 1° quia linea DB, manente alterâ extremitate fixâ in B, circa illud punctum B circumducitur, procul dubio circulariter movetur: & quia illo motu suo describit omnes angulos rectilineos, qui omnes ad punctum B formantur, patet quod vera, & genuina anguli mensura sit linea circularis, quæ describitur à recta DB, angulorum formatrice.

Patet etiam anguli amplitudinem, sive quantitatem esse partem illam circumferentiæ, sive potius esse partem illius spatii quod angulare punctum proxime ambit, à lateribus angulum continentibus interceptam: & quia linea ABC terminus est, sive limes ad quem statimatque formatrix angulorum linea pervenit, anguli forma aperit, melius erit propterea anguli quantitatem ex proportione ad semicircumferentiam, quàm ex proportione ad totum ambitum metiri.

Patet insuper linearum remotionem, quæ in angulo consideratur, longe aliam esse ab ea remotione, quâ disjunctæ duæ lineæ simpliciter inter se distant; simplex enim hæc remotio purum est duarum rerum à se invicem omninò distantium intervallum, quod certè rectâ lineâ mensuratur, quoniam simplici lineæ in longitudinem fluxu producitur. At angularis remotio vestigium est lineæ, non solùm in longitudinem fluentis, verùm etiam in orbem se se circa punctum moventis; unde talis distantia ex recto & orbiculari motu producta cùm sit, ideò à sola recta linea mensurari nequit. Propter hanc remotionis diversam acceptionem meliùs fortasse definiretur angulus planus dicendo eum esse partem orbitæ punctum circumdantis, à magnitudinibus ad illud punctum collectis, & non in continuum positis interceptam.

Ampliùs manifestum est quomodo planus augulus circuli pars dici possit, quomodo in puncto ferè consistat, quomodo distantia sit longitudinis latitudinisque particeps, aut aliquid medium inter lineam & super ficiem, aut conjunctio lineæ cum superficie, & cur recta plures angulos ad idem punctum constitutos metiri non possit, quæ omnia ex præcedentibus nota sunt, nec ullâ indigent explicatione.

De usu Anguli.

Non minus utilis est angulus ad aream figurarum inveniendam quàm sunt ipsæmet lineæ, hoc tantùm discriminis est quod cognitis solummodo regularis alicujus figuræ lateribus tota figuræ area dignoscitur, non verò cognitis solis angulis; ratio hujus rei manifesta est, quia videlicet anguli latera augeri, minuique possunt nullâ factâ in angulo mutatione; unde quandoque accidit ut, verbi gratiâ, duo triangula, licet æquiangula sint, inæqualia tamen habeant latera; nulla verò æquilatera sunt quin simul æquiangula existant; sed anguli, & linearum conjuncto simul beneficio abstrusissima quæque rimantur Mathematici: Quin etiam utriusque usus est reciprocus, nam ex angulis latera, & ex lateribus figurarum anguli dignoscuntur.

DEFINITIO IX.

Angulus denominatur ab earum quibus continetur magnitudinum speciebus.

ITAQUE si rectis lineis comprehendatur, rectilineus, si curvis, curvilineus, si curva & recta mixtilineus vocabitur.

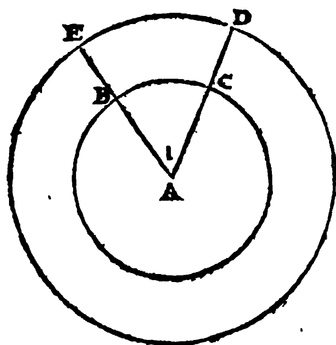
DEFINITIO X.

Anguli amplitudo mensuratur ab arcu circuli, qui ex vertice anguli tamquam centro per ipsius latera describitur.

ITAQUE angulus angulo æqualis est quando descriptis æqualibus circulis ab utriusque anguli verticibus tanquam centris arcus inter ipsorum latera comprehensi æquales sunt, inæquales autem quando tales arcus contingit esse inæquales; cur autem angulus ab arcu circuli mensurari debeat, jam docuimus in definitione anguli.

COROLLARIUM.

Ex hac sic explicata $\angle^{li}$ mensuratione apertè colligitur $\angle^{li}$ cujusvis latera tantò magis dilatari, quantò magis producuntur.



Ut $\angle^{li}$ 1 latera A B, A C, producta usque ad E, & D, ibi magis dilatantur, quàm ad B, & C.

OSTENSIO.

Quoniam idem $\angle^{lus}$ 1 mensuratur ab arcu B C, & ab arcu E D, erit igitur eadem ratio arcus B C ad totam suam circumferentiam, quàm arcus E D ad suam. Sed circumferentia circuli AED major est circumferentia circuli ABC. Ergo arcus E D major est

arcu B C; (nam permutando ut peripheria ad peripheriam, sic arcus ad arcum). Igitur latera AD, AE magis dilatantur ad E, & D, quàm ad B, & C. Quod erat ostendendum.

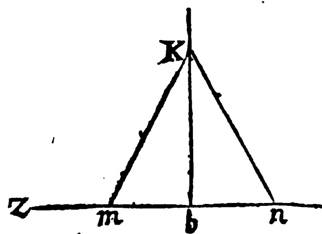
DEFINITIO XI.

Recti sunt anguli, qui à perpendicularibus, obliqui verò qui ab obliquis ad se invicem lineis comprehenduntur, quorum, qui recto major est, obtusus; qui verò minor, acutus, dicitur.

DEFINITIO XII.

Quando sumptis in aliqua recta linea duobus punctis altera linea superveniens sic cadit in medium ipsorum, ut ubique in hujus medii situ reperiatur, sive quod idem est, ut æqualiter ubique sumptis interjiciatur punctis, incidens illa perpendicularis vocatur ad subjectam.

Vel etiam, *Perpendicularis linea dicitur, quæ per rectam sive indeflexam incidentiam alteri lineæ supervenit, obliqua verò quæ per deflexam, sive inclinatam.*



Ut in apposito diagrammate quando sumptis in recta *z m b n* duobus punctis *m*, & *n* altera linea superveniens *b k* sic cadit in ipsorum medium *b*, ut ubique in hujus medii situ reperiatur, hoc est ut quodlibet ejus punctum *k* ab extremis *m*, & *n* æquidistet, tunc recta *k b* perpendicularis erit ad subjectam *z m b n*.

DE NATURA PERPENDICULARIS.

Ut æqualitas rectitudinis, ita rectitudo perpendicularitatis generatrix est. Nam ut recta linea produci concipitur fluxu puncti ad aliud punctum æquabiliter lati, ita perpendiculum optimè concipietur produci fluxu puncti cujusque lineæ medii, & super ipsam per indeflexum ab extremis tramitem lati, qui trames indeflexus

indeflexus nihil aliud est quàm rectitudinis vestigium, ut ad definitionem rectæ lineæ ostensum est. Itaque perpendicularis, quantumvis producta semper manet perpendicularis, quoniam ubique in rectitudinis vestigio posita reperitur; ac quemadmodum indeflexus puncti transitus ab uno termino ad alium procreat rectam, sic indeflexa lineæ in lineam incidentia generat perpendicularem.

Hinc apparet rectitudinem, quæ in recta linea consideratur, simplicissimam esse, ac veluti primariam, utpote quæ absoluta sit, & absque ullo respectu: contra verò, rectitudinem, quæ perpendiculari inest, compositam, ac ortam dici debere; illa etenim ad aliam respectiva cùm sit, componitur ex duabus inter se mixtis rectitudinibus. Quare cùm rectitudo æqualitas quædam sit, duplicabitur æqualitatis ratio adjuncta ad rectam lineam perpendiculari, quæ perpendicularis alia rectitudo est ut vidimus. Itaque perpendicularitas haud malè duplicata rectitudo vocabitur.

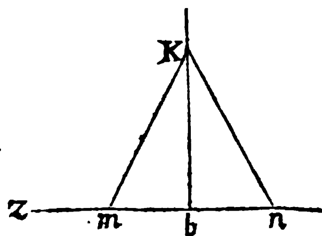
Ex hac autem sic explicata perpendicularis lineæ natura sequentia corollaria deducuntur.

COROLLARIUM I.

Duæ rectæ ab eodem puncto perpendiculi ad duo subjectæ lineæ puncta, æqualiter ab incidentiæ puncto hinc inde distantia ductæ invicem æquantur.

DEMONSTRATIO.

Sic enim quodlibet punctum I^{li} in medio subjectæ inter assumpta puncta contentæ positi, ab illis æquidistat, & consequenter rectæ lineæ, quæ distantijs suis coæquantur à quolibet puncto I^{li} ad assumpta puncta protractæ, inter se æquales sunt.



COROLLARIUM II.

Si duæ æquales rectæ ab extremis alterius exeuntes super ipsam concurrant, concursus punctum in perpendiculo ad subjectæ medium erecto positum est.

DEMONSTRATIO.

Solæ rectæ à punctis æqualiter distantibus ductæ inter se æquales sunt. Ponuntur autem concurrentes rectæ æquales; ergo punctum illarum concursus ab extremis subjectæ æquidistat, & consequenter in elevato subjectæ lineæ medio, sive in 1[o] ad subjectæ lineæ medium erecto, in quo nempe omnia puncta ab extremis subjectæ æquidistantia posita sunt, reperitur, ut erat ostendendum.

COROLLARIUM III.

Si quatuor æquales rectæ, ab extremis duarum æqualium rectarum exeuntes, super ipsas ad duo puncta concurrant, intercepta ab his punctis ad subjectas perpendicula æqualia sunt; si verò æquales rectæ æqualia habeant perpendicula, sive ad media, sive ad earum extremitates erecta, perpendiculorum fines, cum earum finibus connectentes rectæ inter se æquales sunt.

DEMONSTRATIO PRIMÆ PARTIS.

Subjectarum media puncta ab extremis suis punctis æquidistant, propter positam in subjectis lineis æqualitatem; eademque media puncta sursum, ut explicatum est, mota, idest puncta, ubi suprastantes lineæ conveniunt, ab iisdem extremis adhuc æquidistant, nimirum propter positam in supra stantibus lineis æqualitatem: ac per explicatas punctorum mediorum elevationes ipsorum mediorum ab extremis distantiæ crescunt, ut in antecedente vidimus; Igitur mediorum ab extremis æquidistantiæ, in subjectis lineis primò repertæ, aliis æquidistantiis, à mediorum elevationibus ortis, crevêre. Non possunt autem distantiæ à mediorum elevationibus ortæ inter se æquari, nisi puncta illa media supra subjectas

æque altè eleventur : nam quò altius feruntur, eò majores sunt mediorum ab extremis distantiæ. Igitur mediorum ab extremis æquidistantiæ, in duabus subjectis æqualibus repertæ, ab eadem, vel æquali mediorum super ipsas altitudine producuntur.

Quapropter puncta, ubi supraſtantes æquales, super subjectas, etiam æquales ductæ conveniunt, videlicet mota subjectarum media propter allatas rationes æquè altè elevari, sive, quod idem est, ipsa perpendicula, quorum magnitudines à mediorum altitudinibus determinantur, inter se æquari necesse est.

Eodem modo probabitur, 1[la], quamvis ad æqualium subjectarum extremitates erecta, æqualia inter se fore, existente in connectentibus æqualitate. Productis enim in duplum subjectis æqualibus, (quod facilè fiet earum intervallo, & ab earum extremitatibus circulos describendo) jam erunt nominata 1[la] ad media subjectarum erecta. Unde ductis à productionum finibus ad extrema 1[lorum] aliis connectentibus, probabitur, ut superiùs, intercepta à connectentium intersectione ad subjectas 1[la] invicem æquari.

2°, Æquales rectæ æqualia habeant perpendicula, vel ad media, vel ad extremitates posita.

DICO Connectentes rectas inter se æquari.

DEMONSTRATIO SECUNDÆ PARTIS.

Ex hypothesi subjectarum media ab extremis, vel extrema ab extremis æquidistant, propter positam in ipsis subjectis æqualitatem ; hæ verò distantiæ aliis æquidistantiis à perpendicularibus, per hypothesim æqualibus, ortis augentur : surgentia itaque ab his distantiis inter se conjunctis intervalla, ideſt connectentium longitudines, atque adeò connectentes ipsas inter se æquari necesse est.

APPENDIX.

Subjecta linea est ad suum perpendiculum invicem perpendicularis.

DATUM.

Esto recta C D subjecta, cum suo $\perp^{lo}$ BC.

QUÆSITUM.

Oportet ostendere subjectam C D perpendicularem esse ad suum $\perp^{um}$ B C.

PRÆPARATIO.

Intelligatur $\perp^{um}$ BC in duplum productum ad S, ita ut punctum C medium sit totius B S, & connectatur DS.

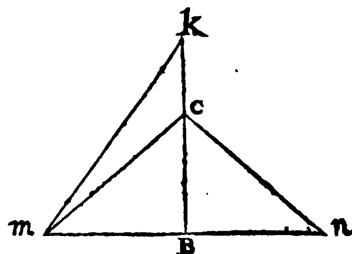
DEMONSTRATIO.

Perpendicularis BC, quantumvis producta, semper manet ad suam subjectam perpendicularis, ut ostensum est initio hujus definitionis. Erit igitur recta C S perpendicularis ad rectam CD. Quare cùm ad æqualem vel potiùs ad eandem CD, & ad ejus extremum C æqualia $\perp^{la}$ BC, & C S erecta sint, propterea horum perpendiculorum fines B & S cum subjectæ fine D, connectentes rectæ B D, & S D æquales sunt (*ex 2ª parte hujus Corollarii*), quæ cùm supra subjectam BS in puncto D conveniant, erit coincidentiæ punctum D in $\perp^{lo}$ ad medium subjectæ B S, hoc est ad punctum C, erecto; & consequenter recta C D per puncta C, & D transiens, perpendicularis est ad B C, ut erat ostendendum.

COROLLARIUM IV.

Quæ ab extremitatibus subjectæ ducuntur ad aliquod perpendiculi, in medio ejusdem subjectæ erecti punctum, majores sunt ipsius subjectæ medietatibus; & tantò majores evadunt, quantò perpendiculi punctum in quo concurrunt à medio subjectæ remotius est.

DEMONSTRATIO.



Dum enim in $\perp^{li}$ generatione punctum lineæ medium elevatur, necessariò recedit ab illa linea, à qua elevari incipit: & quia in illa elevatione semper æquidistat ab extremis subjectæ lineæ; ideò

æquidiſtanter ab illis ſurſum ſe movendo recedit. Quare cùm per receſſum à terminis diſtantia augeatur, tantòque major evadat, quantò longior fit remotio, rectæ, quæ diſtantiis ſuis coæquantur, tantò longiores erunt, quantò remotiùs à $\perp^{li}$ puncto, ſubjectæ lineæ medium efficiente, (ubi nulla eſt adhuc elevatio) coïbunt; & vice verſâ tantò breviores erunt, quantò propiùs ad illud punctum accedent. Quare cùm ſubjectarum linearum medietates ad illud punctum, hoc eſt ad medium ſui coëant, ipſæ erunt breviſſimæ quæ ab eiſdem extremis ad idem $\perp^{um}$ duci poterunt.

APPENDIX.

Rectarum à ſublimi puncto in ſubjectam rectam cadentium breviſſima eſt perpendicularis, reliquæ verò tantò longiores ſunt, quantò longiùs à perpendiculo diſtant.

Nam per antè probata $\perp^{um}$ pro ſubjecta, & vice verſâ ſubjecta pro perpendiculo ſumi poteſt, atque adeò per antecedentem id quod propoſitum eſt demonſtrabitur.

COROLLARIUM V.

Ab eodem puncto unicum ad eandem lineam perpendiculum duci poteſt.

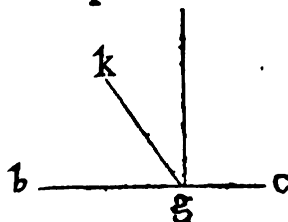
DETERMINATIO CASUUM.

Punctum illud vel erit in data linea, vel ſupra ipſam exiſtet.

Sit primò in data linea.

DEMONSTRATIO IN 1° CASU.

Acceptis hinc inde in ſubjecta linea duobus punctis, æquidiſtantibus ab eo puncto, ubi talis ſubjecta tangitur ab erectis (ſi plura eſſe dicantur) perpendiculis, hæc perpendicula ubique in medio ad ſubjectam ſitu reperiri debent (ex definitione $\perp^{li}$) verùm quia per diverſas vias tranſirent; ideò diverſa forent ejuſdem lineæ media, quod eſt impoſſibile ex notione medii. Et verò



ſicut in aliqua linea unicum punctum in medio ſitum reperitur, quod ab extremis hujus lineæ æquidiſtat, ita etiam ſupra aliquam rectam lineam unica linea in ſubjectæ medio ſitu exiſtit, cujus puncta quælibet ſeorſim ſumpta ab extremis ſubjectæ æquidiſtant.

DEMONSTRATIO IN 2°, CASU.

Jam ſit punctum ſupra datam lineam, & ab eo in ſubjectam lineam cadant, ſi fieri poteſt, duæ perpendiculares, erunt illæ per antecedentem minimæ rectarum ab accepto puncto in nominatam ſubjectam ductilium, cùm tamen ſumptâ unâ pro ⊥lo, altera ab hoc ⊥lo diſtet, ac propterea ipſo perpendiculo longior eſſe debeat, per eandem antecedentem. Quamobrem unica è ſublimi puncto in ſubjectam rectam breviſſima, ideſt, unicum perpendiculum duci poteſt, ut volebat propoſitio.

COROLLARIUM VI.

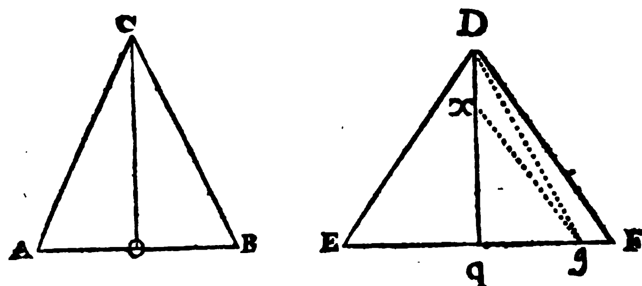
Duæ æquales rectæ à ſubjectæ extremis ad perpendiculum in ejus medio ſitum, & verſus eandem partem protenſæ ad idem punctum concurrunt.

DEMONSTRATIO.

Nam ſi ad diverſa concurrerent, unum neceſſariò propiùs eſſet puncto in ſubjecta linea medio; & ſic, ut ex probatis conſtat, una minor evaderet alterâ, quod hypotheſim deſtruit.

COROLLARIUM VII.

Si quatuor æquales rectæ ab extremis duarum inæqualium rectarum exeuntes ſuper ipſas concurrant, perpendiculum, quod à concurſu duarum ſupra minorem lineam exiſtentium in illam minorem cadet, majus erit perpendiculo, quod à concurſu duarum aliarum, ſupra majorem exiſtentium, in illam majorem demittetur.



DATUM.

Sunto ſubjectæ inæquales, A B ⌉ & E F $_F$, à quarum extremis A, B, E, F quatuor æquales rectæ A C, B C, E D, F D prodeuntes contingant ſe binæ in punctis C & D.

QUÆSITUM.

Oportet oſtendere $\perp^{lum}$ OC, quod à concurſu duarum æqualium A C, & B C in minorem ſubjectam AB deſcendit, majus eſſe $\perp^{lo}$ D q, à concurſu duarum æqualium rectarum E D, F D, in majorem ſubjectam E F incidente.

DEMONSTRATIO.

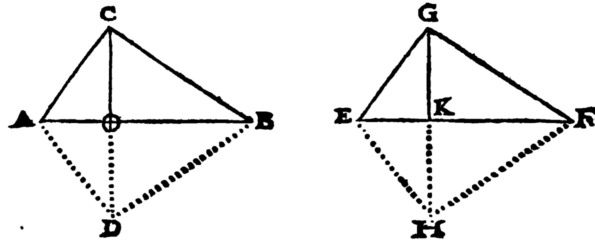
Si perpendicula C O, & D q dicantur æqualia; Quia recta AB minor ponitur rectâ E F, ideò medietas OB minor eſt medietate q F; Quamobrem ablata recta O B, à majori q F, remanebit aliqua ejus pars, quæ ſit g F. Itaque recta D g æquabitur rectæ CB. Nam rectæ lineæ OB, q g jam ſunt æquales ob ſublatam g F differentiam. At ex hypotheſi tam $\perp^{la}$ CO, & Dq quàm rectæ CB & DF invicem æquantur. Ergo rectæ Dg & DF æquales ſunt. Quod eſt abſurdum *(per coroll.* 3um *)* quoniam ab eodem puncto D, ad idem $\perp^{um}$ q F ducta DF tangit ipſam q F in puncto F, remotiori ab incidentiæ puncto, quàm eſt ipſum punctum g, ad quod pertingit ducta D g.

Jam ſi $\perp^{um}$ C O minus dicatur $\perp^{lo}$ Dq, ablata recta O C, à majori q D remanebit aliqua ejus pars, quæ ſit D X. Ductâ itaque rectâ g X æquabitur rectæ CB. Nam q X & C O jam ſunt æquales ob ſublatam DX differentiam. Recta autem q g, per eandem conſtructionem, poſita eſt æqualis O B, & per hypotheſim recta CB eſt

etiam æqualis DF. Ergo gX æquatur DF. Quod est absurdum, (*per corol.* 3um) nam recta g X minor est recta D g, quæ adhuc ipsa DF minor est. Quum igitur $\perp^{um}$ CO nec æquale, nec minus esse queat $\perp^{o}$ D q, superest ut ipso majus sit. Quod erat ostendendum.

COROLLARIUM VIII.

Si super aliquam rectam duæ rectæ, ab ejus extremitatibus ductæ, concurrant, deturque alia recta, lineæ primò positæ æqualis, supra quam etiam duæ aliæ, ab ejus extremis ductæ, concurrant, quæ lineis supra primam coeuntibus sigillatim æquales sint, cadentia à punctis concursus in subjectas perpendicula æquantur inter se, & nominatas subjectas dividunt in partes, singulas singulis æquales.



DATUM.

Sunto duæ æquales subjectæ A B & E F, à quarum extremis A, B, E, F ductæ lineæ A C, B C, E G, F G sigillatim æquales concurrant ad puncta G & C, à quibus in subjectas cadant $\perp^{la}$ C O, & G K.

QUÆSITUM.

Oportet ostendere $\perp^{um}$ C O Π $\perp^{lo}$ G K, & ab ipsis $\perp^{lis}$ subjectas A B, & E F dividi ad puncta O, & K in partes sigillatim æquales, hoc est rectam A O Π rectæ E K, & rectam O B Π rectæ K F.

PRÆPARATIO.

Intelligantur perpendicula CO, GK in duplum producta ad puncta D, & H, itaut puncta O & K jam sint media rectarum C D, & GH. Deinde à punctis D & H ad

ad ſubjectarum extrema A, B, E, F connectentes AD, BD, EH, FH ductæ cogitentur.

DEMONSTRATIO.

Rectæ AC. AD, (*per* 1um *corol.*) æquantur inter ſe, quoniam ab eodem puncto A, in perpendiculo A O aſſumpto, ad duos ſubjectæ C D fines, nimirum ad puncta C, & D, ab incidentiæ puncto O æqualiter diſtantes, ductæ ſunt. Idem probabitur de connexis BC & BD, nec non de alis EG & EH, atque etiam de reliquis FG, & FH ut patet. Sunt ergo AC, AD, EG, EH æquales inter ſe, atque etiam BD, BC, GF, FH invicem æquales.

Jam verò ſi $\perp^{la}$ CD, & GH inæqualia dicantur, ſit $\perp^{lum}$ GH F $\perp^{lo}$ C D. Quoanim igitur quatuor æquales rectæ AC, AD, E G, E H ſupra rectas inæquales CD, & GH concurrunt, $\perp^{lum}$ EK, à concurſu duarum EG, EH, ſupra rectam GH, ex hypotheſi majorem, erectum, minus erit $\perp^{lo}$ AO, quod à concurſu duarum A C, AD, in ſubjectam CD, ex hypotheſi minorem, cadit. Eodem modo probabitur $\perp^{um}$ KF⌉ $\perp^{o}$ OB, ut manifeſtum eſt. Igitur tota E F ⌉ tota AB, quod hypotheſim deſtruit, propterea cùm $\perp^{la}$ CD, & GH inæqualia eſſe nequeant, reſtat ut æqualia ſint, & conſequenter eorum medietates C O, & GK, invicem æquales erunt; ſed probatum eſt connectentes AC, AD, EG, EH inter ſe æquari, ergo (*per corol.* 6um) $\perp^{um}$ A O Π $\perp^{lo}$ EK, quare & reliqua OB Π reliquæ K F; Ideoque ſubjectæ AB & EF in partes ſigillatim æquales à nominatis $\perp^{lis}$ C O, G K dividuntur ad puncta O, & K, ut erat oſtendendum.

DE USU PERPENDICULARIS.

Quandoquidem linearum, ab eodem puncto in ſubjectam lineam ductilium, ſola perpendicularis ordinata eſt, ut pote breviſſima, per allatas rationes, hac de cauſa ſola perpendicularis menſurandis linearum diſtantiis, determinandiſque ſpatiorum, figurarum, atque corporum altitudinibus, ac profunditatibus naturâ ſuâ idonea eſt: hæc eadem rectis lineis, circulorum arcubus, anguliſque

æquibisecandis, nec non mediis proportionalibus inveniendis abhibetur, ut suo loco ostendemus; & ut uno verbo cuncta ejus officia complectar bona pars propositionum geometricarum perpendicularis auxilio indiget, vel ad constructionem, vel ad demonstrationem.

DEFINITIO XIII.

Quando perpendiculum, in quo sumpta fuerint aliqua puncta transversim, & utrimque supra subjectam suam moveri sic intelligitur, ut a directo cum ea situ nuspiam in motione sua deflectat, accepta puncta cum dicto perpendiculo lata fluxu suo rectas describent, quæ tum inter se, tum ad subjectam parallelæ, sive æquidistantes vocantur.

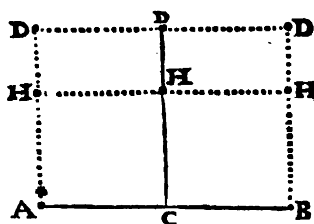
Vel sic, *Parallelæ, sive æquidistantes lineæ dicuntur, quæ cùm inter se distent, nusquam tamen ad se invicem accedunt, aut à se invicem recedunt, sed per æquidistantia semper intervalla porriguntur.*

Vel adhuc, *Parallelæ, sive æquidistantes lineæ dicuntur, inter quas æquialtum ubique mediat intervallum.*

QUARE parallelismus sive æquidistantia est in magnitudinibus, quovis intervallo à se invicem distantibus invariatio, sive immutabilitas distantiæ per totam intervalli latitudinem; vel est perpetuus ejusdem distantię tenor, per totam existentis inter semotas magnitudines spatii latitudinem altitudinemve constantissimè servatæ.

EXPLICATIO.

Esto $\perp^{um}$ CD, supra basim AB erectum, in quo sumantur quotlibet puncta H & D. Dictum autem $\perp^{um}$ CD transversim, hoc est secundùm suam longitudinem, & utrimque, nimirum versus oppositas partes A & B, supra nominatam rectam AB intelligatur ea lege moveri, ut à directo cum ea situ nuspiam



in ſua motione deflectat; ſive quod idem eſt, ut rectos angulos cum ſubjecta A B ſemper efficiat. Perveniat autem ſic motum $\perp^{lum}$ C D ad puncta A & B, ubi ſupraſtantium linearum AD & BD loca repleat, ſive per eas in acquiſito ſitu repræſentetur: Atque ex ſumptorum punctorum H & D, cum dicto $\perp^{lo}$ C D latorum veſtigiis oriantur lineæ H H H, & D D D. Manifeſtum eſt ex appoſita motus conditione ſubjectam A B, & exortam H H H ubique inter ſe æquidiſtare, quoniam idem perpendiculum C H, per totam interjecti inter lineas A B, & H H H ſpatii longitudinem normaliter motum, extremis ſuis C & H ipſas A B & H H H ubique attingit, hoc eſt æquales ubique diſtantias inter lineas A B, H H H, determinat; idem dicetur de ſubjecta A B, & exorta D D D, nimirum ipſas æquidiſtare inter ſe, ut patet. Tales itaque deſcriptæ lineæ, eandem inter ſe diſtantiam ubique ſervantes, parallelæ, ſive æquidiſtantes meritò dicuntur; ipſas autem eſſe rectas minimè dubium eſt, cùm earum omnia puncta eandem cum extremis altitudinem obtineant, quemadmodum recta A B; ſi enim aliquod exortæ lineæ H H H punctum intermedium extremis altiùs, aut depreſſiùs eſſet, ſequeretur $\perp^{lum}$ C H F, aut ∏ eſſe $\perp^{lo}$ A H vel B H, contra ſuppoſitum generationis hujus lineæ modum; idem puta de linea D D D. Evidens quoque eſt, rectâ A B in infinitum productâ, & factâ eâdem deſcriptione, exortam H H, in infinitum etiam abeuntem paralleliſmum ubique ſervaturam cum ipſa A B; Ideoque parallelæ lineæ quamvis in infinitum productæ ſemper manent parallelæ.

DE USU PARALLELARUM.

Parallelarum uſus tam latè extenditur, quàm ipſius perpendiculi earum generatoris; nam ſi perpendiculi ope inter duas datas rectas una media proportionalis invenitur, parallelarum auxilio ad tres datas rectas quarta proportionalis apponitur: ipſæ eædem parallelæ rectis lineis proportionaliter ſecandis adhibentur; & quoniam

in universa Mathematicarum scientiarum constitutione; licet diversa objecta respiciant, solæ proportiones, quæ in iis reperiuntur, considerantur, omnia enim ad mensuram, quæ proportiones in conceptu suo involvit, revocantur, manifestum est parallelarum, à quibus linearum proportio efficitur, atque determinatur, usum in geometricis immensum esse.

DEFINITIO XIV.

Terminus est quod alicujus rei extremum est.

DEFINITIO XV.

Figura est quæ sub aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur.

DEFINITIO XVI.

Circulus est figura plana, sub unica linea puncto medio æquidistante comprehensa; illa autem linea circumferentia, & punctum medium circuli centrum dicitur.

Aut si ad circuli generationem attenderimus, sic ipsum definiemus.

Circulus est figura plana, quæ describitur à recta linea finita circa unum extremum quiescens circumducta, donec in eumdem locum, unde moveri primum inceperat, restituta fuerit.

Atque hinc patet rectas omnes, â centro ad circumferentiam extensas, invicem æquales esses.

DEFINITIO XVII.

Diameter autem circuli est recta linea per centrum ducta, & ex utraque parte in circuli peripheriam terminata.

DEFINITIO XVIII.

Segmentum circuli est figura, quæ sub recta linea, & circumferentiæ parte comprehenditur, quæ quidem circumferentiæ pars, arcus vocatur; & si recta linea peripheriam subtendens per centrum transeat, factum segmentum semicirculus dicitur.

DEFINITIO XIX.

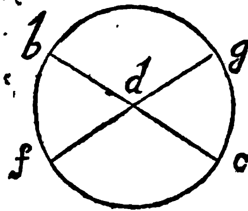
Sector circuli est circuli pars, sub duobus radiis, à centro exeuntibus, & sub arcu, inter duos illos radios intercepto, comprehensa, ut b d g.

POSTULATUM.

Quoniam circulus, ut ex ejus genesi apparet, simplicissimo rectę lineę, in orbem circa unum quiescens extremum fluentis motu, sine arte fit; & recta linea cujusvis longitudinis sumi potest, ut ad rectæ lineæ definitionem annotavimus; Ideo jure optimo.

Postuletur ut à quovis centro & intervallo circulum describere concedatur.

Ampliùs quoniam æqualium rectarum circa manentia puncta volutiones spatia claudunt, quorum extrema, sive circumferentiarum puncta omnia à suis mediis æquidistant (distãtias enim illas, ęquales rectæ lineæ sive æquales radii, metiuntur) estque diameter dupla radii. Igitur



COROLLARIUM I.

Circuli sunt æquales, quorum radii, vel diametri sunt æquales.

Deinde quia in generatione circuli, volutus circa manens punctum radius uniformi, & æquali motu fertur, consequens omninò est ut æqualia spatia temporibus

æqualibus, vel æqualibus lationibus percurrat; qualibet autem latione, vel quolibet momento temporis dictus circuli genitor radius, à quiete exiens, angulum ad centrum efficit, qui tantò major evadit, quantò major fit radii motio; quando igitur anguli ad centrum sunt ęquales necesse est radii lationes æquales fieri, & consequenter decursa ab ipso spatia esse etiam æqualia. Quare

COROLLARIUM II.

Ejusdem vel æqualium circulorum sectores, quorum latera æquales angulos continent, inter se æquales sunt.

Ut in apposito diagrammate sector f d b æquatur sectori c d g quia $\angle^{lus}$ b d f ⊓ $\angle^{lo}$ g d c.

Nam sectores nihil aliud sunt quàm illa spatia à radio circumacto decursa.

Et verò si $\angle^{lis}$ b d f, & g d c positis æqualibus fieri posset ut sectores f d b, & c d g inæquales essent, procul dubio supra rectam d c, quæ est æqualis d f describi posset sector æqualis sectori b d f, qui idem spatium non clauderet, quàm sector. g d c; quoniam illi sectores inæquales esse ponuntur; quod cùm impossibile sit, eo quod circuli sicut rectæ lineæ generatio simplicissima sit, sive pluribus modis fieri nequeat, necessariò sequitur propositos sectores b d f, & g d c, angulos ad d æquales habentes, inæquales esse non posse, erunt ergo æquales, ut vult corollarium.

Adhuc quia circuli periphæria oritur ex fluxu puncti, uniformi & æquali motu, sive æquidistanter circa aliud manens punctum lati, illa erit ubique sibi similis, & naturæ simplicissimæ, plures in species individuæ; nam motus uniformitas & æqualitas nullam in se variationem recipit; Ideoque in eodem, vel æqualibus circulis periphæriæ partes, sive arcus, quorum extrema æquidistant, inter se æquales sunt; illos enim eodem modo inter extrema distendi, sive per æquales vias transire necesse est, cùm pluribus modis fieri nequeant. Itaque

Corollarium III.

In eodem, vel æqualibus circulis æquales rectæ æquales arcus abſcindunt.

Et verò ſi fieri poſſet ut ab æqualibus rectis lineis duo ejuſdem, vel æqualium circulorum ſubtenſi arcus, inæquales eſſent, procul dubio ſuper una ex æqualibus lineis deſcribi poſſet alius ejuſdem circuli arcus, alteri arcui ęqualis, cujus ſaltem aliqua pars ſupra, vel intra arcum, ab accepta recta linea ſubtenſum, tranſiret, (nam cum arcus illi ponantur inæquales, per eandem omninò viam tranſire non debent,) & ſic ſequeretur ejuſdem circuli radios inter ſe inæquales fore, quod repugnat naturæ circuli.

Appendix I.

Ejuſdem vel æqualium circulorum ſegmenta, æquales baſes habentia, inter ſe æqualia ſunt.

Nam, ut probatum eſt, deſcriptus ſuper una ex æqualibus baſibus propoſiti cujuſlibet ſegmenti arcus per eandem omninò viam tranſiret, quàm arcus illius ſegmenti, ſuper accepta baſi exiſtentis; ideoque idem ſpatium ambo clauderent.

De usu circuli.

Longum eſſet recenſere omnes circuli proprietates; nec ſatis commodus hic locus eſt ad eas enumerandas. Quare monuiſſe ſufficiat in geometricis nihil utilius eſſe circulo. Hinc igitur omne principium, huc refer exitum.

DEFINITIO XX.

Figuræ denominantur à linearum quibus illæ continentur ſpeciebus, vel à numero laterum angulorumve.

Sic à linearum ſpeciebus figuræ Rectilineæ, vel Curvilineæ vocantur. A numero laterum Trilateræ, Quadrilateræ, Multilateræ. A numero angulorum Triangulæ, vel Trigonæ, Quadrangulæ, Pentagonæ, &c.

DEFINITIO XXI.

Trilateræ porrò figuræ denominantur à laterum æqualitate, aut inæqualitate; vel ab angulorum speciebus.

Sic à laterum æqualitate vel inæqualitate Triangulum Æquilaterum dicitur, quod tria latera habet æqualia; Isoceles, sive Æquicrure, in quo duo tantùm latera sunt æqualia, tertio existente majore, vel minore; Scalenum verò, cujus tria latera sunt inæqualia. Ab angulorum verò speciebus Triangulum Orthogonium, vel Rectangulum dicitur, quod unum angulum habet rectum; Ambligonium, vel Obtusiangulum, quod unum habet obtusum; Oxygonium autem, siue Acutiangulum, quod tres acutos habet angulos.

DEFINITIO XXII.

Quadrilaterarum autem figurarum parallelogramum est cujus bina opposita latera sunt parallela: Quadratum verò quod æquilaterum & rectangulum est; rombus autem figura æquilatera, sed non rectangula; altera parte longius rectangulum est, at non æquilaterum, & sæpissimè rectangulum simpliciter vocatur. At romboides figura est, quæ adversa latera & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est neque rectangula.

DEFINITIO XXIII.

Rectangulum contineri dicitur sub duabus lineis, angulum rectum continentibus.

▭um enim oritur ex fluxu lineæ rectæ super aliam rectam perpendiculariter motæ; & quia fluxus ille maximè ęquabilis est, & uniformis, hinc fit ut rectangula, quorum bases, & suprastantia perpendicula sigillatim sumpta ęqualia sunt, invicem ęquentur, eodem enim motu, & ęqualibus factoribus ambo generantur.

MONITUM.

MONITUM.

Quando definitione 8ª angulum esse dixi duarum, pluriumve ejusdem speciei magnitudinum, ad unum punctum collectarum, & non in continuum jacentium brevissimam remotionem, dictum solummodo puta de lineis, & superficiebus, non verò de solidis, ut in hujus definitionis explicatione apertè declaravi. Ideò verò generali magnitudinis voce usus sum, ut angulos planos, atque solidos unicâ definitione comprehenderem. Verùm si quispiam magnitudinis nomen malè hoc in loco usurpatum existimet, responsum habeat me per ullum aliud convenientius vocabulum mentem meam explicare non potuisse; sed modò mecum de re consentiat, de verbis nullam litem movebo. Fortasse paucis additis clarior apparebit illa eadem anguli definitio, si ita dicamus.

Angulus est duarum, aut plurium, ejusdem (1ª videlicet aut 2ª) speciei magnitudinum, ad unum punctum collectarum, & non in continuum jacentium brevissima remotio, sive distantia.

CAPUT QUINTUM.

De Elementis Geometricis.

FONS INVENTIONIS.

De linearum situ, sive de variis linearum inter se positionibus.

INVESTIGATIO.

Quot modis linearum situs variari possit.

VEL inter se lineæ conjunguntur, atque coincidunt, vel aliquo à se invicem distant intervallo. Jam quæ coincidunt, obliquæ necessariò sunt inter se, vel perpendiculares; quæ verò invicem distant, necessariò etiam parallelæ sunt, vel imparallelæ. Unde quatuor omninò neque plures neque pauciores disponendarum inter se linearum variationes inveniuntur.

Quoniam autem per certas rectarum linearum motiones in geometricis cuncta fieri probavimus; manifestumque sit pro diversis motarum rectarum inter se posituris effectiones inde provenientes diversas mutationes subire; evidens profectò est ab his rectarum linearum diversis motibus, variisque dispositionibus, velut à certis quibusdam geometricæ facultatis elementis geometricum robur accipere quicquid in mathematicis geometricam desiderat solutionem. Horum ergo geometricorum Elementorum esto.

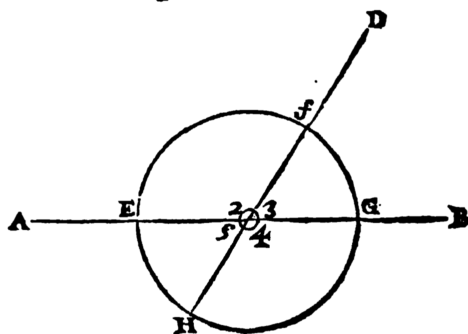
ELEMENTUM PRIMUM.

De rectarum linearum coincidentia.

FONS INVENTIONIS.

Elementaris hæc coincidentium inter se linearum institutio necessariam habet cum angulorum doctrina connectionem, in eaque tota fundatur; nam ab indirecta linearum coincidentia angulum angulosve tamquā à vera causa prodire satis apertè declarat eorum definitio. Cùm itaque angulorum procreatio præcipuus sit qui in concurrentibus inter se lineis notetur effectus, ob eam causam primi hujus Elementi tractatio in angulorum ad mutuum linearum occursum nascentium contemplatione præcipuè versatur, per illamque maximè perficitur. Quisquis igitur angulorum naturam, ortumque, sicut antè tradita sunt, probè noverit, & penitùs inspexerit, is posteà per talem cognitionem, atque comprehensionem quæcumque ferè de coincidentibus lineis formari possunt vel theoremata, vel problemata facili negotio reperiet, repertaque firmissimarum, & ab eodem cognitionis fonte haustarum demonstrationum robore muniet. Principiorum enim diligens observatio viam præbet ad reliquorum omnium inventionem paratissimam. Quin imo qui plenam habuerit principiorum cognitionem, jam perfectam, licet nondum explicatam omnium, quæ

ab eis deduci poſſunt, ſcientiam adeptus eſt; cùm longæ illæ conſecutionum ſeries, quas diſciplinas nominamus, in fœcunditate principiorum totæ condantur, & ab ſola eorum efficaci virtute proveniant. In primis igitur allaborandum eſt, ut rectum, & quàm maximè clarum de principiis conceptum efformemus; eorum deinde naturas, & his naturis debitas proprietates accuratè examinando, quas ipſa vires, quamque potentiam ad operandum habeant parvo labore deprehendemus; unde difficile poſteà non erit varios modos excogitare, & ex iis ſimpliſſimos eligere, quibus ſingula quæque ab his principiis orta gignantur. Atque his duabus rebus, nimirum exactâ principiorum definitione, & ſimplicium modorum, per quos quodcumque ab eis pendet effici, & fœliciter explicari queat inventione, plena, perfectaque eorum cognitio comparatur, quâ ſemel imbutus, atque fœcundatus intellectus tanta poſteà rerum copia diteſcit, tantaque luce colluſtratur, ut connexarum invicem effectionum numeroſiſſimam multitudinem, adhibitâ præſertim in eis ordine deducendis ſolerti induſtriâ, tanquam uberrimos parturientis cognitionis fructus effundere, & ex onuſto ſinu proferre valeat.

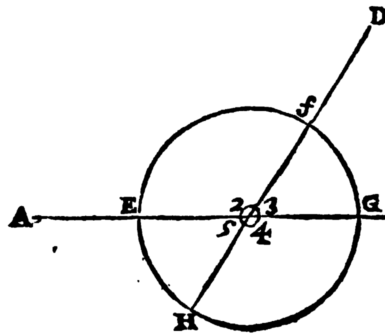


Nunc ergo ſi generatio angulorum, prout in eorum definitione explicata eſt, iterum in hac præſenti figura conſideretur, primo mentis intuitu confeſtim apparebit formatricem angulorum lineam O D, à poſitione rectæ A B exeundo, & circa coincidentiæ punctum O fluendo, donec eandem A B ad oppoſitas incepti motus partes rursùs attigerit, hac ſuâ per orbicularem ſemitam E *f* G H circumlatione ſitus omnes, qui in rectis inter ſe coincidentibus lineis obſervabiles ſunt, percurrere, (redeuntibus quippe ordine iiſdem coinciden-

tiuun inter se linearum situs variationibus, dum dicta formatrix angulorum O D subter subjectam A B, & circa punctum O defertur, quàm cùm anteà supra subjectam A B, & circa idem punctum O volvebatur, ut evidens est, & in unoquoque situ binos ad dictum coincidentiæ punctum angulos exoriri, pro quorum amplitudine decursus arcus E*f*G integer semper assumitur. Atque hinc formatur, & confirmatur sequens propositio.

PRIMA PROPOSITIO ELEMENTARIS.

Si recta supra rectam, & inter ejus extrema ceciderit, nec ipsam secaverit, duos ad coincidentiæ punctum angulos rectos, vel certè duobus rectis æquales facit; si verò coincidentes rectæ se invicem secuerint, quatuor ad sectionis punctum angulos rectos, vel certè quatuor rectis æquales efficient, ex quibus bini quilibet contrapositi invicem æquantur. Omnes verò circa idem punctum constituti quatuor rectis æquales sunt.



DATUM I.

Recta D O supra rectam A B, & inter ejus extrema, hoc est in quodcumq; punctum O, inter ejus extrema A & B positum, cadat, nec eam secet, sed ipsam solummodo in dicto puncto O contingat.

QUÆSITUM.

Demonstrandum est à nominatis lineis A B, & D O, juxta dictum modum coincidentibus, duos angulos 2 & 3, vel rectos, vel duobus rectis æquales, ad ipsum coincidentiæ punctum O, fieri.

CONSTRUCTIO.

Centro, O, intervallo quocumque O E fiat circulus OE*f*GH, secans rectas A B, O D, si opus est productas.

DEMONSTRATIO.

Si superveniens recta D O perpendicularis sit ad subjectam AB, liquet ex angulorum rectorum definitione

comprehensos à perpendicularibus inte r se lineis binos angulos 2 & 3, rectos esse. Si verò obliquè cadat, quoniam tunc enati bini anguli 2 & 3, eandem quam cùm recti erant amplitudinem obtinent, nimirum arcum E*f*G, ut est ostensum in Inventionis fonte, idcirco duobus rectis semper æquantur. Quod erat primo loco ostendendum.

ALITER.

Quocumque modo recta D O supra subjectam A B cadens steterit, ostensum est in inventionis fonte eundem arcum E*f*G pro binorum angulorum 2 & 3, ad coincidentię punctum O formatorum amplitudine semper mansurum, hoc est binos angulos, à recta D O in rectam A B perpendiculariter cadente, genitos æquari binis quibuscumque angulis, ab eadem recta D O, in eandem rectam A B obliquè incidente, profectis.

At recta D O in subjectam AB perpendiculariter cadens, binos ad coincidentiæ punctum O positos angulos à rectis ut pote lineis sibi invicem perpendicularibus contentos, rectos facit.

Ergo eadem recta D O in eandem subjectam A B obliquè cadens, binos ad idem coincidentiæ punctum O positos angulos duobus rectis æquales efficiet.

DATUM II.

Iam coincidentes rectæ AB, HD, (vide superiorem figuram) secent se invicem in puncto O.

QUÆSITUM.

Oportet ostendere à coincidentibus A B, H D se invicem secantibus quatuor rectos, vel quatuor rectis æquales angulos 2, 3, 4, 5 ad ipsum sectionis punctum O fieri, quorum bini quilibet contrapositi 2, 4, vel 3, 5 æquales sunt inter se; omnes verò circa punctum O, vel quodlibet aliud existentes quatuor rectis æquari.

DEMONSTRATIO.

Probatum est angulos 2, & 3 duobus rectis æquari; eademque ratione demonstrabitur angulos 5, & 4 duobus

rectis etiam æquales esse (nimirum propter similem rectæ HO in eandem rectam AB incidentiam.) Ergo quatuor anguli 2, 3, 4, 5 ad sectionis punctum O generati, quatuor angulis rectis æquantur.

Deinde quoniam anguli 2 & 3 ostensi sunt æquales duobus rectis, idemque & per similem demonstrationem de angulis 3 & 4 concludi possit, ipsos nimirum duobus rectis æquari. Ergo duo anguli 2. & 3 duobus angulis 3, 4, æquantur, & detracto communi 3 reliquus 2 reliquo contraposito 4 æqualis erit, per communem animi notionem. Idem dicetur de duobus contrapositis 3 & 5 ut patet.

Postremò cùm probatum sit angulos 2, 3, 4, 5, circa punctum O existentes, quatuor rectis æquari, horumque angulorum amplitudo totam circumferentiam E f G E exhauriat, hoc est totum ambitum, qui circa punctum O existit; nullus ergo circa punctum O formari peterit angulus, quin sit pars horum quatuor rectorum. Idem de quovis alio puncto factâ eâdem constructione demonstrabitur, ut manifestum est. Quare cùm partes omnes simul sumptæ toti suo adæquentur, necesse est angulos quotcumque, circa punctum O, vel quoduis aliud existentes, quatuor rectis æquari. Quod erat ostendendum.

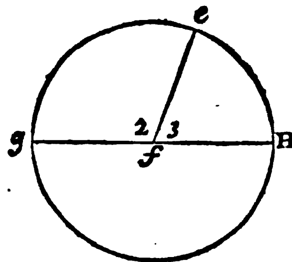
COROLLARIUM I.

Duorum rectorum angulorum amplitudo est semipheria circuli.

Hoc enim probatum est in prima parte demonstrationis hujus elementi.

COROLLARIUM II.

Si ad aliquod rectæ lineæ punctum duæ rectæ ab oppositis partibus ductæ duos angulos efficiant duobus rectis æquales, ipsæ in continuum sibi erunt, sive unicam lineam efficient.



DATUM.

Esto recta *ef*, ad cujus aliquod punctum *f* duæ rectæ *gf*, H*f*, ab oppositis partibus ductæ, angulos 2 & 3 duobus rectis æquales faciant.

QUÆSITUM.

Dico ambas lineas *g f*, & H*f* sibi esse in directum, sive g H unam esse lineam.

CONSTRUCTIO.

Centro *f*, intervallo quocumque *fg* describatur circulus *fge*H, secans rectas *gf*, & H*f*, si opus est productas.

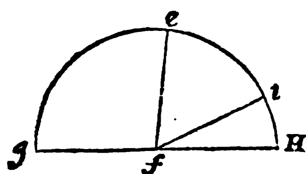
DEMONSTRATIO.

Anguli 2, & 3 duobus rectis æquantur ex hypothesi; Igitur eorum arcus *ge*, & *e*H simul sumpti, hoc est totus arcus *ge*H, medietas est peripheriæ descripti circuli *fge*H. Atqui eadem peripheria *ge*H *e* æquibisecatur à producta semediametro *gf*, ex notione diametri; producta igitur semediameter *g f* ad punctum H pertinget, & sic recta *f*H eadem erit linea, quàm quæ ex semidiametri productione nascitur. Ideoque ductæ *gf*, H*f* integram diametrum constituunt, sive in unam lineam ecolascunt, ut erat ostendendum.

COROLLARIUM III.

Duæ rectæ lineæ nullam habent partem communem.

CONSTRUCTIO.



Possibile sit *gf*H, & *gfi* duas rectas esse, quæ partem *gf* communem habeant.

Ductâ utcumque rectâ *e f* ad illud extremum communis segmenti, quod reliquas dictarum linearum partes attingit, centro *f* fiat circulus *fgei*H, secans *gf*H, & *gfi*, si opus est productas.

DEMONSTRATIO.

Cùm recta *ef*, cadat tam supra rectam *gf*H, quàm supra rectam *gfi*; igitur faciet cum unaquaque illarum duos ∠los, duobus rectis æquales, & consequenter arcus g e I, mensurans amplitudinem ∠lorum à recta e f supra rectam *g f i* consistente factorum, æquabitur arcui

geiH, mensuranti amplitudinem ∠lorum, ab eadem recta *ef*, supra rectam *gfH* consistente, genitorum, hoc est, major arcus *geiH* æquabitur arcui minori *gei*, quod est absurdum. Unde constat unicam ex propositis lineis *gfi*, & *gfH* sibi esse in directum, ut hîc est *gfH*; reliquam verò, nimirum *gfi*, non unam constituere lineam, sed ex duabus *gf*, & *fi*, indirectè jacentibus conflari. Ergo duæ rectæ commune segmentum habere nequeunt, ut erat ostendendum.

CONSECTARIUM I.

Duo plana se mutuo secantia nullam habent partem communem.

Nam si hoc verum esset tunc recta linea, in illa parte communi utcumque ducta, continuari posset, in duobus planis post intersectionem in diversum abeuntibus, ut manifestum est, & sic duæ rectæ lineæ aliquam partem communem haberent, contra præcedentem.

CONSECTARIUM II.

Hinc sequitur, *Datis alicujus rectæ lineæ duobus solummodo punctis ipsam integram dari, sive nosci, quemcumque situm habere possit.*

Nam propositæ rectæ lineæ, cujus duo puncta data sunt, primò pars illa data est, quæ assignatis punctis interjicitur; quoniam inter duo puncta unica solum recta linea ductilis est, & quæ in infinitum produci potest, ut ad rectæ lineæ definitionem annotavimus; ex quo sequitur reliquam etiam propositæ lineæ partem dari; quoniam per rectæ lineæ intra duo data puncta ductilis, & in infinitum producibilis vestigium transire debet, ne duæ lineæ commune segmentum habere dicantur.

Idem & per easdem rationes de plano conclùdes, videlicet datis alicujus plani duabus solummodo lineis ipsum planum integrum dari, quemcumque situm habere possit.

Nam etiam inter duas rectas unicum planum ductile est, quod in infinitum produci potest, ut ad ejus definitionem annotavimus. Unde eadem quæ priùs de recta linea, absurda sequerentur, nisi verum esset quod proponitur.

CONSEC-

CONSECTARIUM III.

Itaque, *Si duæ rectæ, aut duo plana se mutuo secuerint in unico puncto, vel in unica linea se intersecabunt.*

Nam si duæ rectæ lineæ, aut duo plana in pluribus punctis, vel in pluribus lineis se intersecarent, aliquam partem communem haberent, quod mox probatis repugnat; aut certè duæ rectæ, vel duo plana inter duo intersectionis puncta, vel inter duas intersectionis lineas (quando sunt duo plana se mutuo intersecantia) duci possent, quod etiam impossibile est, ex probatis ad definitionem rectæ lineæ, & plani.

CONSECTARIUM. IV.

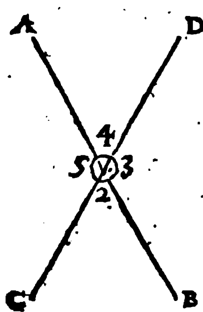
Rectæ lineæ pars quædam non est in subjecto plano, pars verò in sublimi. 1. p. 11.

Cùm enim pars in subjecto plano posita in infinitum continuari possit in eodem subjecto plano, sequeretur duas rectas commune segmentum habere posse. Quod est impossibile.

COROLLARIUM IV.

Si ad aliquod rectæ lineæ punctum duæ rectæ ab oppositis partibus venientes contra positos ad verticem angulos æquales inter se fecerint, hæ rectæ lineæ in directum sibi erunt.

DATUM.



Esto recta A B, ad cujus punctum O, ab oppositis partibus ductæ sunt binæ rectę C O, D O, contrapositos ad verticem O angulos 2, & 4, vel 3, & 5 æquales inter se facientes.

QUÆSITUM.

Dico rectas C O, D O unicam lineam efficere, sive sibi esse in continuum.

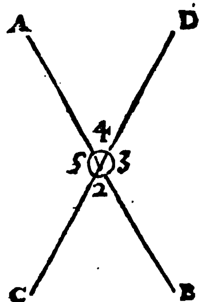
DEMONSTRATIO.

Ex hypothesi $\angle^{lus}\ 2 \sqcap \angle^{lo}\ 4$: & utrimque addito $\angle^{lo}\ 3$ fiunt $\angle^{li}\ 2 + 3 \sqcap (\angle^{lis}\ 4 + 3 \sqcap)$ duobus rectis (nimirum propter rectæ DO in rectam AB incidentiam). Ergo per antecedentem rectæ CO, & DO unam lineam efficiunt secundum propositionis intentum.

COROLLARIUM V.

Si quatuor rectæ lineæ ab eodem puncto exeuntes quatuor angulos fecerint, quorum bini oppositi æquales sint, binæ adversæ lineæ in continuum sibi erunt, sive unicam lineam efficient.

DATUM.



Jam sint 4 lineæ OA, OD, OB, OC, exeuntes à puncto O, ubi 4^{or} angulos constituant, quorum oppositi 2, 4, æquales sint, aliique 3, 5 pariter oppositi sint etiam æquales.

QUÆSITUM.

Dico AB, CD duas esse tantummodo lineas, hoc est duas AO, OB sibi esse in continuum, & unicam efficere lineam, duas itidem CO, OD unicam.

DEMONSTRATIO.

Quoniam anguli 2 & 4 ponuntur æquales inter se; itemque anguli 3 & 5 invicem. Igitur anguli 2 & 3 æquantur angulis 4 & 5. Et consequenter anguli 2 & 3 dimidium efficiunt $\angle^{orum}$ ad punctum O positorum. Quia verò anguli ad punctum O constituti 4 rectis æquales sunt, ut probatum est. Ideò anguli 2 & 3 duobus angulis rectis æquantur. Ergo lineæ CO, & DO unicam lineam efficiunt. Idem concludetur de lineis AO, & BO. Patet ergo propositum.

ELEMENTUM SECUNDUM.

De coincidentium linearum perpendicularitate.

FONS INVENTIONIS.

QUONIAM perpendiculi generatio docet duarum æqualium rectarum, ab extremis alicujus subjectæ prodeuntium, & in idem punctum supra cadentium concursum in perpendiculo ad hujus subjectæ medium erecto semper inveniri; circuli verò natura talis est ut omnes ejus radij inter se coæquentur; intellectis ergo duobus circulis æqualibus, & intersecantibus se invicem, quorum centra rectâ lineâ connectantur, manifestum est rectas lineas, à singulis intersectionum punctis, ad circulorum centra, quæ connectentis extrema puncta sunt, protensas inter se coæquari; unde statim ex generandi perpendiculi notitia concludetur dictarum intersectionum puncta in perpendiculo per medium nominatæ connectentis transeunte reperiri. Atque hinc formatur & confirmatur sequens propositio.

ELEMENTARIS PROPOSITIO.

Si duo circuli ab extremis alicujus rectæ lineæ tanquam centris descripti se mutuo secent, æqualesque sint, intersectionum puncta in perpendiculo per medium dictæ lineæ transeunte posita sunt; si verò descripti circuli inæquales sint, intersectionum puncta in aliquo quidem perpendiculo datam lineam secante posita sunt, sed non in eo perpendiculo, quod per ejus medium transit.

DETERMINATIO CASUUM.

Peripheriæ circulorum ab extremis alicujus rectæ lineæ tanquam centris descriptorum, vel per extrema positæ lineæ transibunt, quod tunc accidet quandò illorum radii positæ lineæ æquabuntur, ut in 1ª figura; Vel positam lineam secabunt, quod tunc accidet quando illorum radii dictâ lineâ minores erunt, ut in 2ª figura; Vel tan-

dem extra positam lineam excurrent, quod tunc accidet quando illorum radij prædictâ lineâ majores erunt, ut in 3ª figura. In omnibus autem istis casibus eadem est constructio, eademque demonstratio.

DATUM I.

Dentur circuli ab extremis datæ A B descripti, & intersecantes se, quorum alii transeant per datæ rectæ extrema, A & B, & invicem æquantur ut in 1ª figura: Alii autem datam A B secent, & inter se sint æquales ut in 2ª figura: Alii tandem inter se pariter æquales extra datam A B excurrant, ut in 3ª figura; & sint intersectionum puncta C & D.

QUÆSITUM I.

Dico hæc intersectionum puncta C & D reperiri in perpendiculo, per medium subjectæ AB transeunte.

CONSTRUCTIO.

Ab extremis punctis datæ A & B, ad intersectionum puncta C & D ducantur in omnibus figuris lineæ A C, B C, AD, BD, & CD.

DEMONSTRATIO.

In tribus primis figuris descripti bini circuli invicem æquantur (*ex hypothesi*) Ergo in omnibus figuris binæ rectæ, ab extremis datæ lineæ, hoc est à descriptorum æqualium circulorum centris A & B, ad eorum circumferentias, sive ad puncta C, & D ubi se intersecant, protensæ invicem æquantur (*ex definitione circulorum æqualium*). Igitur in omnibus figuris puncta, ubi binæ æquales rectæ, supra datam rectam A B conveniunt, videlicet nominata circularium intersectionum puncta C & D in perpendiculo per medium datæ subjectæ A B trenseunte posita sunt, ex notitia generationis perpendiculi ut volebat propositio.

DATUM II.

Dentur inæquales circuli ab extremis A & B, tanquam centris descripti, & interseantes se in punctis C & D.

QUÆSITUM.

Dico hæc interſectionum puncta C & D reperiri in ſitu alicujus perpendiculi, rectam A B ſecantis quidem, ſed per illius medium non tranſeuntis.

DEMONSTRATIO.

Ambæ rectæ A C , A D (*vide ultimam fig.*) cùm ſint ejuſdem circuli radij invicem æquantur (*ex definitione circuli*) ſimiliter ambæ B C, B D cùm ſint etiam ejuſdem circuli radij inter ſe æquales ſunt (*per eandem definitionem*) & ab extremis C, & D ſupra rectam C D concurrunt in punctis A & B. Ergo concurſus puncta B & A in perpendiculo per medium ſubjectæ C D tranſeunte poſita ſunt ut ſupra. Quare recta A B perpendiculariter inſiſtit medio rectæ C D, vel potius perpendiculum eſt per medium baſis C D tranſiens (recta enim linea in eodem cum extremis ſitu ponitur ut ex ejus definitione apparet). Igitur etiam recta C D perpendiculariter inſiſtit rectæ A B; ſubjecta enim ut in perpendiculi difinitione oſtenſum eſt ad ſuum perpendiculum perpendicularis eſt. Jam verò quoniam minoris circuli radij A C & A D minores ſunt majoris ex hypotheſi circuli radiis D B & B C ; Ergo punctum A, ubi minores illi radii in perpendiculo A B per medium ſubjectæ C D tranſeunte conveniunt, minus diſtat ab ejuſdem ſubjectæ medio puncto O quàm punctum B, ubi majoris circuli radii C D & D B in dicto perpendiculo A B coincidunt. (*Ex probatis ad definitionem perpendicularis.*) Igitur recta B O minor eſt rectâ O B. Quapropter perpendiculum C D per punctum O tranſiens rectam A B in medio non ſecat, & conſequenter, interſectionum puncta C & D in perpendiculo rectam A B ſecante quidem, ſed per ejus medium minime tranſeunte poſita ſunt, ut erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Ex hujus propoſitionis demonſtratione generalis habetur methodus perpendiculum ad propoſitam rectam lineam erigendi.

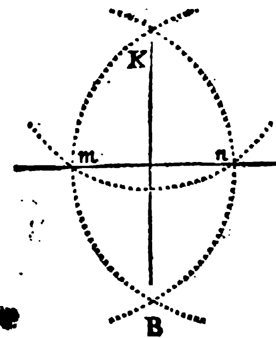
CASUS I.

Ut si ad datam in superioribus figuris rectam lineam A B perpendiculum utcumque erigere oporteat. Descriptis ab illius extremitatibus tanquam centris, & ad quamcumque distantiam circulis vel æqualibus, vel inæqualibus dummodo se intersecent, connexisque recta linea intersectionum punctis, hæc connectens recta perpendicularis erit ad positam A B.

CASUS II.

Si verò punctum in proposita recta linea signetur, acceptis hinc inde duobus punctis ab assignato puncto æquidistantibus, (quæ quidem æquidistantia capietur describendo circulum ab assignato puncto tanquam centro, & ad quamlibet distantiam) factisque ab inventis punctis tanquam centris, & intervallo quocumque duobus circulis æqualibus, & intersecantibus se, (ut in primis tribus figuris factum vides) reliqua fiant ut priùs, & habebitur intentum, ut ex probatis apparet.

CASUS III.



At si datum punctum supra datam rectam extiterit. Ut si à puncto K supra datam rectam *m n* posito perpendiculum in subjectam *m n* demittere oporteat.

Centro K describatur arcus *m n* secans datam *m n* in punctis *m*, *n*. Deinde centris *m* & *n* & ad quamlibet distantiam, describantur æquales circuli intersecantes se, vel in dato puncto K, vel supra ipsum, vel infra, nihil enim refert, dummodo intersecantes circuli invicem æquentur. Ultimo connexis rectâ lineâ intersectionum punctis B & K, probabitur, ut jam factum est, connexam B K perpendiculariter insistere rectæ *m n*, secundum propositionis intentum.

CONSECTARIUM.

Iam facile eſt nobis cum Galilæo geometricè demonſtrare tres ſolùm reperiri magnitudinum ſpecies, nempe longitudinem, latitudinem & profunditatem, ſive altitudinem, hoc eſt à tertia dimenſione ad quartam tranſitum non dari.

DEMONSTRATIO.

Recta ſola, non verò curva (ut ad rectæ lineæ definitionem annotavimus) punctorum diſtantias determinat; tum quia recta eſt omnium breviſſima; tum quia unica, & ſola determinata eſt; cùm aliæ ſint infinitæ, inæquales, & longiores: determinatio verò ex eo fieri debeat quod eſt unum, atque certum. Sic ergo rectam lineam habemus pro determinatrice longitudinis inter duos terminos.

Jam ſi rectæ cuipiam lineæ, pro longitudine poſitæ, parallelam rectam ducamus, & ex puncto in recta linea, quæ longitudinem deſignat, aſſumpto, interjectæ inter dictas lineas ſuperficiei latitudinem metiri velimus, ducenda erit recta linea, quæ ad poſitam pro longitudine lineam perpendiculariter inſiſtat, hæc enim breviſſima eſt, & unica ex infinitis majoribus, & inter ſe inæqualibus, quæ ad alia, atque alia oppoſitæ lineæ puncta duci poſſunt. Hactenus igitur habemus quod prima dimenſio, ſive longitudo determinetur rectâ lineâ: Secunda verò, hoc eſt latitudo, aliâ, non ſolùm rectâ, verùm etiam perpendiculariter inſiſtente alteri, longitudinem determinanti.

Quod ſi ab eodem fixo termino, ſubjecti plani, inter duas jam ductas lineas contenti diſtantia ab alio quodam parallelo plano, in ſublimi poſito capienda ſit, ex illo ſublimi plano ducenda erit utique recta linea ab ſubjectum planum perpendicularis, cùm ipſa ſit breviſſima omnium, quotquot ex eodem ſublimis plani puncto ad ſubjectum planum duci poſſunt.

Quod ſi ergo punctum aliquod ſtatuas caput, ac ter-

minum dimenſionum, ex eoque ducas rectam lineam, primæ dimenſionis, hoc eſt longitudinis determinatricem; neceſſariò altera linea latitudinem definitura primæ illi perpendiculariter, ſive ad angulos rectos inſiſtet; & illa denotatrix altitudinis, ſeu tertiæ dimenſionis, ex eodem progreſſa puncto duabus reliquis etiam perpendiculariter, ſive ad angulos rectos inſiſtet. Atque ita à tribus rectis perpendicularibus, tamquam à tribus lineis, unis, & certis, & breviſſimis determinatas habemus tres dimenſiones, nimirum longitudinem, latitudinem, & profunditatem.

Et quia perſpicuum eſt quod in eodem aſſignato puncto non poſſit alia recta concurrere à tribus jam ductis diverſa (poſſunt enim ab oppoſitis partibus aliæ rectæ his advenire, ſed cùm rectà concurrere deberent, ideò primarum tantùm productiones forent) quæ ipſis perpendiculariter inſiſtat; cumque dimenſiones à ſolis rectis lineis, ſibi invicem perpendicularibus, determinari debeant, ex eo ſequitur dimenſiones, ſive magnitudinum ſpecies; quæ ſic appellantur, tribus plures non eſſe, ut erat oſtendendum.

COROLLARIUM II.

Sequitur adhuc ex hujus propoſitionis demonſtratione rectam AB, in primis tribus figuris, æquibiſecari à recta CD, nam oſtenſum eſt rectam CD perpendiculum eſſe per medium ſubjectæ AB tranſiens.

COROLLARIUM III.

Conſtat etiam ex hujus propoſitionis demonſtratione angulum CBD in prima & ultima figuris, & arcum CAD æquibiſecari in A, per rectam AB.

Nam probatum eſt rectam AC æquari rectæ AD. Atque cùm ęquales hæ rectæ ſubtendant ejuſdem circuli arcus AC, AD. Igitur dicti arcus AC, AD ab æqualibus rectis ſubtenſi, inter ſe propterea æquales ſunt (*ex probatis ad definitionem circuli*). Et conſequenter angulus ABC æquabitur angulo ABD. Quapropter angulus CBD & arcus CAD bifariam diviſus eſt ſecundùm propoſitionis intentum.

Atque

Atque ex his duobus corollariis generalis methodus elicitur datam rectam lineam; vel angulum rectilineum, vel circuli datum arcum æquibisecandi.

PARS I.

Ut si recta AB. (*vide tres primas figuras*) æquibisecanda proponatur. Descriptis ab illius extremitatibus A & B quibuslibet circulis æqualibus, dummodo se intersecent, connexisque rectâ lineâ intersectionum punctis, hæc connectens recta propositam AB æquibisecabit, ut patet ex probatis.

PARS II.

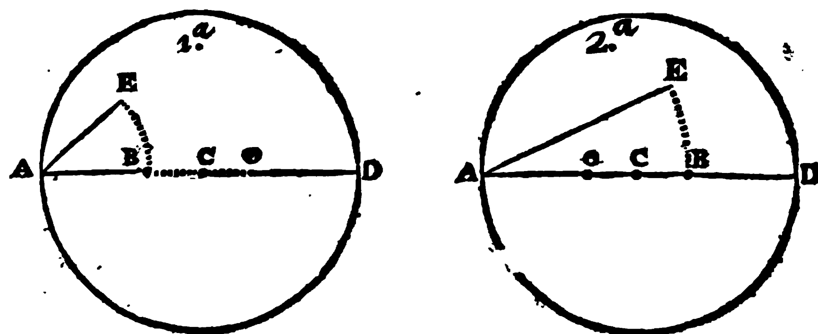
Vel si (*ut in prima & ultima figuris*) detur angulus CBD æquibisecandus. Centro B, ad quamlibet distantiam BC fiat arcus CAD, secans alterum latus BD, si opus est productum, ductâque CD demittatur à vertice B, in ductam CD, perpendiculum (ex proximè tradita methodo) secans descriptum arcum in A, & erit ∠lus CBD bifariam divisus per rectam BA, ut patet ex hoc tertio corollario.

PARS III.

Vel si (*in eisdem figuris*) detur arcus CAD bifariam dividendus. Ductâ CD rectâ lineâ, æquibisectâque per perpendiculum BA, datum arcum attingens in A. Probabitur, ut jam factum est, ad definitionem perpendicularis omnes rectas, ab extremis rectæ CD, ad aliquod perpendiculi in ejus medio erecti punctum protensas invicem æquales esse. Igitur rectæ AC, AD, & consequenter ab eis subtensi arcus AC, AD inter se æquantur, ut erat ostendendum.

APPENDIX.

Ex inventione puncti in recta linea medii, & ex circuli natura methodus elicitur rectam lineam datæ rectæ æqualem ad quodlibet datum punctum apponendi.



DETERMINATIO CASUUM.

Datum punctum vel extra datæ lineæ positionem existet, vel in ipsius vestigio situm erit, vel certè in ipsamet reperietur, & tunc vel erit unum extremorum datæ lineæ, vel inter utrumque jacebit extremum.

CONSTRUCTIO, ET DEMONSTRATIO IN 1° CASU.

Si datum punctum fuerit unum extremorum datæ rectæ lineæ, tunc à dato illo puncto tanquam centro, & intervallo datæ rectæ fiat circulus, à cujus centro, hoc est à dato puncto ad peripheriam ducatur quælibet recta, & erit absolutum negotium; nam tunc illa, & quæcumque alia sic ducta datę rectæ æquabitur, & quæstioni satisfaciet, sicut evidens est ex definitione circuli.

SECUNDUS CASUS.

Jam detur recta A B, & punctum O vel in ipsius vestigio situm, ut in prima figura, vel inter utrumque jacens extremum, ut in secunda figura.

QUÆSITUM.

Oportet ad punctum O rectam lineam O D ponere, quæ datæ A B sit æqualis.

CONSTRUCTIO.

Datâ AB indefinitè productâ æquibisecetur segmentum BO in puncto C, à quo ut centro, radio verò AC describatur circulus, secans AB productam in puncto D.

FACTUM I.

Dico rectam OD æquari datæ AB.

DEMONSTRATIO.

Radii AC, CD invicem æquantur ex definitione circuli, necnon per fabricam rectæ OC, CB; Ergo ab æqualibus AC, CB demptis æqualibus OC, CB, residuæ AB, OD in prima figura æquantur inter se; vel æqualibus AC, CD adjectis æqualibus OC, CB totales AB, OD in secunda figura æquales erunt inter se. Quod erat ostendendum.

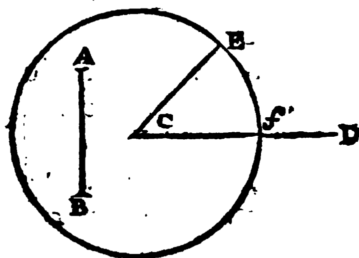
III. CASUS.

Postremò detur recta AE extra cujus vestigium assignetur punctum O ut in duabus ascriptis figuris. Jungantur puncta A & O rectâ lineâ AO indefinitè productâ in qua mensuretur AB æqualis datæ AE, & reliqua fiant ut priùs, eritque OD æqualis AB sive AE.

CONSECTARIUM.

Hinc modus habetur ex datis duabus rectis inæqualibus à majore lineam minori æqualem abscindendi.

DEMONSTRATIO IN 1º CASU.



Si propositæ rectæ in idem punctum coincidant; tunc à puncto coincidentiæ tanquam centro, & datæ minoris rectæ intervallo descriptus circulus ex majore linea radium abscindet datæ minori rectæ æqualem, ut evidens est ex natura circuli.

CASUS II.

Si verò propositæ lineæ inter se distent, tunc ad unum datę majoris lineæ finem recta quędam linea datæ minori æqualis, juxta præcedentem doctrinam, apponatur, & ab accepto majoris lineę fine, tanquam centro, radio verò appositam lineam, id est datam minorem ęquante descriptus circulus, ex majore linea radium abscindet, ut prius, appositæ lineę, sive datę minori ęqualem, ut erat faciendum.

CONSECTARIUM II.

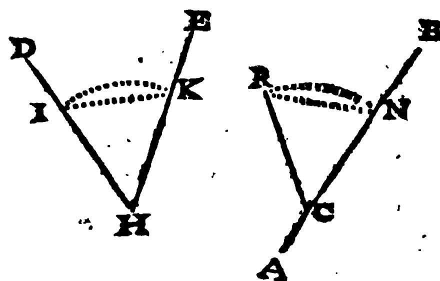
Ex eadem methodo, rectam nempe lineam datæ rectæ æqualem ad quodlibet punctum apponendi, praxis enata est per quam existente possibili inscriptione data quacumque recta linea in dato circulo inscribitur.

CONSTRUCTIO, ET DEMONSTRATIO.

Ab accepto quolibet in dati circuli peripheria puncto tanquam centro, intervallo verò datam rectam ęquante descriptus circulus dati circuli peripheriam attinget, aut secabit in aliquo puncto: (nam si neutrum faciat, manifestum est datam rectam in dato circulo inscribi non posse.) Jam si ab accepto puncto ad contactus vel sectionis terminum recta ducatur, ipsa erit inscripta quam quęrimus, nam utrimque circuli continget ambitum, & datę rectę ęqualis erit per constructionem.

CONSECTARIUM III.

Ad signatum in data recta linea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum ponere.



DATUM.

Detur recta AB & in ea punctum C. Detur etiam angulus rectilineus DHE.

QUÆSITUM.

Oportet ad datam rectam AB, & ad datum in ea punctum C angulum ponere, qui dato angulo rectilineo DHE sit æqualis.

CONSTRUCTIO.

Centro H, intervallo quocumque H I, in alterutro latere D H accepto fiat arcus I K, secans alterum latus H E in puncto K. Deinde à dato puncto C tanquam centro; spatio verò C N ęquali rectę H K, vel H I describatur indefinitus arcus N R. Tum ducatur subtendens I K, cui ęqualis N R inscribatur in arcu N R. Tum ducatur C R.

FACTUM.

Dico angulum R C N ęquari dato angulo D H E.

DEMONSTRATIO.

Centris H, C, & spatiis æqualibus H I, C N descripti sunt ęqualium circulorum arcus I K & N R, & factus est arcus R N arcui I K ęqualis, eo quod subtensę I K, R N ęquantur inter se (ex constructione & circuli definitione), Ergo factus angulus R C N ęquatur angulo dato D H E, ut volebat propositio.

CONSECTARIUM IV.

Ex tribus datis rectis lineis, quæ tribus datis æquales sint, triangulum construere.

DETERMINATIO DATI.

Oportet autem duas quocumque modo sumptas reliquâ majores esse, ex annotatis ad definitionem rectę lineæ.

CONSTRUCTIO, ET DEMONSTRATIO.

Positâ per antecedentem doctrinam quâpiam rectâ lineâ, uni è datis rectis lineis æquali, ab ambobus talis positę extremis, tanquam centris fiant duo circuli, quorum radii datis duabus reliquis rectis lineis sigillatim æquentur (atque hi duo circuli se mutuo secabunt propter appositam dati determinationem). Jam si à descriptorum circulorum centris, sive à positæ lineę extremis, ad punctum ubi circuli se intersecant duo radii ducantur, exsurget triangulum, sub his radiis, & sub posita

linea, hoc est per fabricam, & circuli definitionem, sub tribus lateribus, datis tribus rectis lineis sigillatim æqualibus comprehensum, ut erat faciendum.

COROLLARIUM IV.

Ampliùs manifestum est ex hujus elementaris propositionis demonstratione semidiametrum A B (in prima figura) æquibisecare rectam C D, arcum C A D subtendentem, vel in dicti arcus circulo inscriptam, eique perpendiculariter insistere. Hoc enim jam probatum est quamvis aliter enunciatum.

FONS INVENTIONIS.

Quoniam verò patet idem demonstrari posse de quacumque alia subtendente, vel inscripta per centrum circuli non transeunte, videlicet illam æquibisecari à talis circuli radio, vel à diametro (si radius usque ad peripheriam producatur) in illa perpendiculariter insistente.

Hinc formatur, & confirmatur sequens propositio.

Si diameter circuli perpendiculariter secet aliquam rectam in ipso circulo inscriptam, vel ipsius circuli arcum subtendentem, illam æquibisecabit, & si æquibisecet eidem perpendiculariter insistet.

DATUM.

In ultima figura diameter A H vel semidiameter A B (nihil enim interest) perpendiculariter secet aliquam rectam C D, arcum C A D subtendentem.

QUÆSITUM.

Dico rectam C D bifariam secari à semidiametro A B.

CONSTRUCTIO.

Centro B ad extrema subtendentis C & D agantur, ut priùs, rectæ B C, B D.

DEMONSTRATIO.

Punctum B reperitur in situ perpendiculi, per medium subjectæ C D transeuntis, & plura perpendicula

ab eodem puncto ad eandem lineam duci nequeunt, (*ut ostensum est ad definitionem perpendiculi*). Ideò recta A B ad rectam C D perpendicularis (*ex hypothesi*) per medium subjectæ C D transibit. Igitur illam æquibisecabit.

2°, Quoniam recta C D æquibisecari ponitur à recta B A, ideò punctum O ubi nominata C D attingitur à radio A B, in medio ejusdem rectæ C D consistit; sed punctum B etiam in medio rectæ C D reperitur: tota ergo B A in medio subjectæ C D posita est, & consequenter ipsi perpendiculariter insistit, ex probatis ad definitionem perpendiculi.

CONSECTARIUM I.

Si in circulo duæ rectæ non per centrum extensæ se se mutuo secent, se se inæquibisecabunt.

DEMONSTRATIO.

Si enim se æquibisecarent sequeretur actam à talis circuli centro ad earum intersectionis punctum lineam utrique earum medietati perpendiculariter insistere. Unde concluderetur partialem angulum suo totali angulo coæquari, quod est impossibile. Quum ergo secantes se in circulo lineæ non per centrum extensæ æquibisecari se invicem nequeant ob allatas rationes, superest ut se se inæquibisecent secundum propositionis intentum.

CONSECTARIUM II.

Si in circulo perpendicularis quædam recta rectam aliam, circuli arcum subtendentem æquibisecet, in illa æquibisecante circuli centrum positum est.

DEMONSTRATIO.

Quocumque loco circuli centrum existat definitio circuli nos admonet ductas ab ejus centro ad alicujus subtendentis extrema, hoc est ad ambitum circuli, rectas lineas inter se æquales fore. Igitur circuli centrum quocumque loco situm in aliquo perpendiculo per alicujus

ſubtendentis medium tranſeunte ſemper exiſtit. Atqui unicum perpendiculum per cujuſlibet ſubtendentis medium tranſiens, ſive ſubtendentem æquibiſecans duci poteſt, ut ad perpendiculi definitionem demonſtratum eſt; in ducta igitur recta linea quamlibet ſubtendentem æquibiſecante circuli centrum poſitum eſt, ut erat oſtendendum.

CONSECTARIUM III.

Atque hinc deducitur methodus circuli centrum inveniendi.

CONSTRUCTIO, ET DEMONSTRATIO.

Aſſumpto enim propoſiti circuli quolibet arcu, ductâque ipſius ſubtenſâ, æquibiſecetur illa ſubtenſa per aliquam perpendicularem, eò uſque productam, donec utrimque circuli contingat ambitum. Jam in illa æquibiſecante circuli centrum poſitum eſſe neceſſariò demonſtratur ex antecedentibus; nec alibi quàm in ejus medio ſitum eſſe oſtenditur ex definitione circuli; æquibiſectâ itaque illa perpendiculari habetur intentum, nam æquibiſectionis punctum centrum eſt quod quæritur.

Vel aſſumpto adhuc alio quovis arcu, ductâque ipſius ſubtenſâ, æquibiſecetur illa, ut ſuprà, per aliquam perpendicularem, in qua circuli centrum poſitum eſſe ſimiliter oſtendetur. Duæ igitur perpendiculares in circuli centro ſibi invicem occurrunt, & cùm in unico puncto linearum fiat occurſus. Igitur punctum interſectionis illarum erit neceſſariò quæſitum circuli centrum.

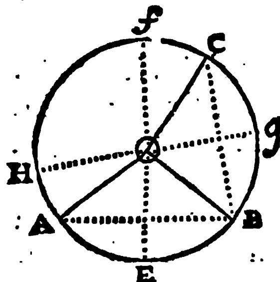
APPENDIX.

Ex ultima hujus demonſtrationis parte manifeſta fit ſequens propoſitio.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod à quo ad peripheriam cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales, acceptum punctum centrum eſt ipſius circuli.

DATUM

DATUM.



Ab assumpto puncto O in proposito circulo cadant ad peripheriam plures quàm duæ rectæ æquales O A, O B, O C.

QUÆSITUM.

Dico punctum O centrum esse propositi circuli.

CONSTRUCTIO.

Ducantur rectæ A B, & B C, in quas demittantur perpendicula O g & O E producta usque ad H, & *f*.

DEMONSTRATIO.

Perpendicula H *g* & *f*E per subtensarum A B, B C media transeunt, ob positam suprastantium linearum O A, O B, nec non O B, O C æqualitatem: & in puncto O se intersecant, propter constructionem; Ergo in intersectionis puncto O propositi circuli centrum positum est, ex probatis, id est punctum O propositi circuli centrum est. Quod erat ostendendum.

Atque hinc *Methodus habetur per data tria puncta non in directum posita circulum ducendi.*

Et *Dato circuli arcu ipsum circulum describendi, cujus arcus est.*

Ut si datis in præcedenti figura tribus punctis A, B, C, non in directum positis; vel dato arcu A B C, circulum describere oporteat, per data tria puncta A, B, C, transeuntem, vel in cujus circumferentia datus arcus reperiatur. Sumptis in arcu A B C tribus punctis A, B, C, ducantur rectæ, A B, & B C, ac reliqua fiant ut priùs, & habebitur intentum.

CONSECTARIUM.

Circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non secat.

Sumpto enim cujusvis intersecantium se invicem circulorum centro; ductisque ab illo ad tria (si tot, vel plura esse dicantur) intersectionum puncta rectis lineis, sequeretur inventum unius circuli centrum, etiam alterius circuli centrum esse; quoniam ab illo puncto plures quàm duæ rectæ æquales ad ejus peripheriam, sive ad intersectionum puncta caderent, & sic ambo circuli omni ex parte congruentes, se se propterea non secarent, contra hypothesim.

FONS INVENTIONIS.

Quoniam verò △li Æquilateri, vel Isoscelis latera invicem æqualia sunt *(ex eorum definitione)* si igitur à verticibus talium △lorum tanquam centris, spatio verò unius æqualium laterum describatur circulus, necessariò transibit per extremum alterius æqualis lateris. Unde basis, fiet subtensa alicujus arcus, in descripti circuli peripheria existentis: demissum verò à vertice ad basim perpendiculum, & ad circumferentiam descripti circuli productum, erit semidiameter dicti circuli. Unde talis oritur propositio.

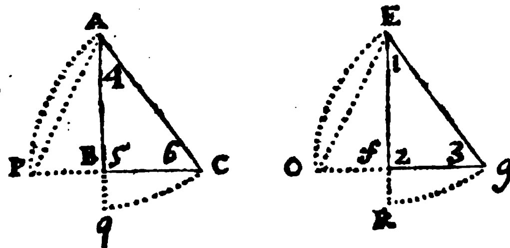
In triangulo Æquilatero, vel Isoscele perpendiculum, ab angulo duobus æqualibus lateribus comprehenso, in basim demissum, illam, & dictum angulum æquibisecat, & contra.

Hoc enim idem est, quod prius ostensum fuit, licet aliter enuncietur.

Ex hoc etiam corollario quarto confirmatur sequens propositio.

Triangula rectangula, quorum singula latera singulis lateribus æquantur, æquiangula sunt, & æqualia.

DATUM.



Proponantur triangula rectangula A B C, & E f g, quorum singula latera singulis lateribus æqualia sint, videlicet B C ipsi f g. Ac ipsi E g, atque A B ipsi E f.

QUÆSITUM.

Demonstrandum 1° est $\triangle^{la}$ A B C, & E f g inter se æquiangula esse, videlicet $\angle^{um}$ 1 ⊓ $\angle^{lo}$ 4. & $\angle^{lum}$ 3 ⊓ $\angle^{lo}$ 6. Rectos autem $\angle^{los}$ 2 & 5 inter se æquales esse, manifestum est ex illorum definitione.

CONSTRUCTIO.

Centris C & g, radiis verò C A, ac g E fiant arcus A P, E O, secantes latera C B, g f, producta in P, & in O, ducanturque subtensæ A P, E O.

DEMONSTRATIO.

Latus A C, sive P C ponitur æquale lateri E g, sive O g, & pars B C, parti f g. Ergo reliquum B P æquatur reliquo O f. Sed L^{um} A B ponitur etiam æquale L^{lo} E f. Igitur rectæ A P, & E O, connectentes L^{ia} A B, B P, atque E f, f O, singula singulis æqualia, inter se propterea æquales sunt.

Quoniam verò eædem connexæ A P, E O circulorum, (propter positam radiorum C A, & g E æqualitatem) æqualium; Ideò arcus A P, & E O æquales sunt. Ergo ab his arcubus mensurati anguli 3 & 6 invicem æquantur. Idem, & per eandem constructionem ostendetur de $\angle^{lis}$ 4 & 1, eos videlicet inter se æquari, ut patet. Ergo cum $\perp^{li}$ 5 & 2 etiam æquales sint, ut pote recti, proposita $\triangle^{la}$ A B C & E f g æquiangula sunt.

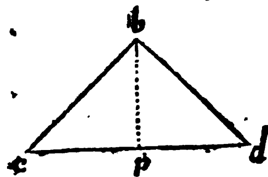
DEMONSTRATIO SECUNDÆ PARTIS.

Si proposita $\triangle^{la}$ ABC & Efg inter se æqualia non sunt, procul dubiò super uno alterutrius $\triangle^{li}$, putà posterioris Efg latere fg constitui poterit aliud $\triangle^{lum}$ priori ABC æquale, æquilaterum, & æquiangulum, quod idem spatium non claudet quàm $\triangle^{lum}$ Efg, basi fg superimpositum; quoniam proposita $\triangle^{la}$ inæqualia dicuntur. Quod est impossibile, nam quum à puncto f ad basim fg unicum $\perp^{lum}$ duci possit, ideò describendi $\triangle^{li}$ $\perp^{lum}$, quod æquale esse debet $\perp^{lo}$ AB, id est $\perp^{lo}$ Ef, idem omninò erit cum ipso $\perp^{lo}$ Ef. Quare & reliquum ejus latus idem cum latere E g, ob naturam rectæ lineæ. Ergo proposita $\triangle^{la}$, eò quod inter se æquilatera sunt, & æquiangula, ut ostensum est, etiam æqualia fieri necesse est.

CONSECTARIUM I.

Hinc sequitur Isoscelium triangulorum angulos, ad basim existentes, inter se æquari.

DATUM.



Proponatur $\triangle^{lum}$ Isosceles bcd.

QUÆSITUM.

Dico $\angle^{los}$ bdc, bcd ad basim cd existentes inter se æquari.

CONSTRUCTIO.

A puncto b, in basim dc demittatur $\perp^{um}$ bp.

DEMONSTRATIO.

Æquilaterismus est inter orta per fabricam duo $\triangle^{la}$ rectangula bdp, & bcp (nam latus bd æquatur lateri bc, propter positum in his lateribus Isoscelismum, & latus dp lateri cp propter factam in basi dc à $\perp^{lo}$ bp æquibisectionem ad punctum p, sicut ostensum est in hac elementari propositione, latus autem bp commune est.) Ergo æquiangula sunt inter se per antè probata, & consequenter correspondentes anguli bdp, & bcd æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

CONSECTARIUM II.

Hinc etiam sequitur Triangula quæcumque inter se æquilatera, & inter se æquiangula esse, & æqualia.

DEMONSTRATIO.

Nam ex probatis ad definitionem perpendiculi demonstrabitur unumquodque propositorum △lorum, demissis in eorum bases ⊥lis, dividi in duo △la rectangula inter se æquilatera, atque ex mox probatis æquiangula, & æqualia. Sed horum partialium △lorum iidem omninò sunt anguli quàm propositorum, ut manifestum est. Proposita ergo △la inter se æquiangula sunt, & æqualia, ut erat ostendendum.

COROLLARIUM V.

Apparet etiam ex hujus elementaris propositionis constructione triangula A B C, *&* A D B, *in 1a figura existentia esse æquilatera; reliqua verò in cæteris præter ultimam figuris, & iisdem notata literis, esse isoscelia.*

Nam quoniam circuli primæ figuræ inter se æquantur, ex hypothesi; ideò tres rectæ A B, A C, C B, ab ipsorum centris ad peripherias extensæ æquales sunt. Ergo △lum ABC est æquilaterum. Idem quoque dicetur de △lo A D B.

In 2a verò, & 3a figuris ostensum est rectas A C, & B C inter se æquari, necnon rectas A D, B D inter se, (*per circuli definitionem.*) Quare cùm ex hypothesi quælibet harum rectarum minor sit datâ basi A B, ut in 2a figura, vel eâdem basi A B major existat, ut in 3a figura; Ideò △la A B C, & A B D Isoscelia sunt.

CONSECTARIUM.

Atque hinc deducitur *Methodus generalis Triangulum Æquilaterum vel Isosceles describendi.* Cujus praxis ex sola figurarum inspectione fit manifesta.

Alio etiam modo triangulum Isosceles describi potest.

Ut constituto super data quavis recta linea △lo æquilatero, & ab uno ex ejus ∠lis ductâ, & in infinitum pro-

ductâ perpendiculari, ejus basim æquibisecante; si ad hujus perpendicularis aliqua puncta tam supra, quàm infra verticem sumpta ab extremis baseos rectæ lineæ ducantur, generabuntur hac ratione $\triangle^{la}$ Isoscelia varii generis, ut ex annotatis ad definitionem perpendicularis apparet.

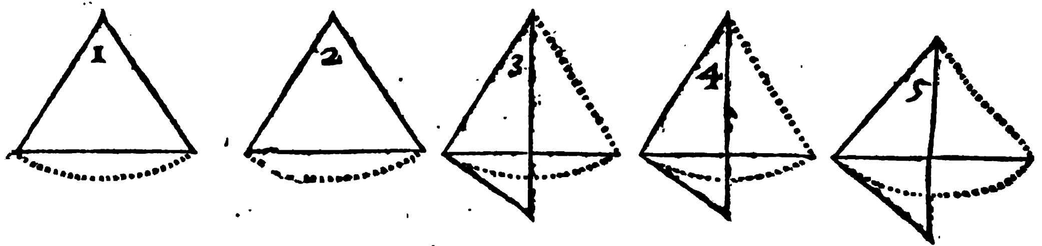
Si verò scalenum $\triangle^{lum}$ supra datam quamlibet rectam construere libeat.

Descripto ab una datæ rectæ extremitate circulo, & intervallo datam lineam superante, factoque ab altera datæ rectæ extremitate circulo, priorem secante intervallo verò datâ lineâ minore, si à dictis extremis ad intersectionis punctum ducantur duæ rectæ, orietur hac ratione scalenum $\triangle^{lum}$, ut manifestum fit ex definitione circuli.

COROLLARIUM VI.

Ex natura $\perp^{li}$, & explicata methodo $\angle^{um}$ rectilineum dato angulo rectilineo æqualem ad quodvis punctum apponendi, talis efficitur & confirmatur propositio.

In omnibus triangulis, quibus duo latera, sigillatim sumpta, æqualia sunt, bases basibus æquantur, quando anguli, ab his lateribus sigillatim æqualibus comprehensi, inter se sunt æquales: quando verò tales anguli inæquales existunt, bases etiam inæquales sunt; & major quidem ea, quæ majorem angulum sustinet, minor verò, quæ minori angulo subtenditur.



PRIMA PARS.

CONSTRUCTIO ET DEMONSTRATIO IN I° CASU.

Si propositâ $\triangle^{la}$ Isoscelia sint, ut in 1ª, & 2ª, figuris

nihil erit difficultatis. Factis namque ab angulorum, æqualibus lateribus comprehensorum, verticibus, quasi centris, & laterum æqualium intervallo, circulis, arcus inter eorum latera comprehensi æquales erunt, propter positam tum laterum, tum angulorum ab his comprehensorum æqualitatem. Unde horum arcuum æqualium subtensæ, quæ dictorum △lorum bases sunt, inter se æquantur (*ex probatis ad definitionem circuli*).

PRIMA PARS.

CONSTRUCTIO, ET DEMONSTRATIO IN 2°, CASU.

Jam si in propositis △lis unum ex lateribus altero majus sit, ut in 3a, & 4a figuris. Ab altera parte majorum laterum, & ad ipsa majora latera, in punctis æqualium angulorum, à dictis lateribus comprehensorum, fiant anguli nominatis angulis æquales. Jam uterque auctus angulus æqualis erit; cùm uterque sit duplus angulorum ex hypothesi æqualium. Si igitur ab horum æqualium angulorum verticibus quasi centris, intervallo verò minorum laterum, ex hypothesi æqualium, arcus inter ipsorum latera interceptos describas, erunt hi arcus æquales inter se. Quamobrem & horum arcuum subtensæ invicem æquabuntur. Sed has subtensas æquibisecat majus propositorum △lorum latus, propter positam ∠lorum ex utraque talis lateris parte existentium æqualitatem; erit ergo tale latus ad ipsas subtensas perpendiculare. Quoniam autem subtensæ inter se æquantur, ut probatum est, & ab ipsarum extremitatibus, ad ⊥um, in earum medio erectum, ductæ rectæ lineæ, hoc est, descriptorum arcuum radii inter se æquales sunt. Igitur perpendicula, à punctis in quo radii concurrunt, in subtensas demissa inter se æquantur. Sed illa perpendicula partes sunt majorum laterum, per hypothesim æqualium; ablatis ergo ab his, nominatis partibus æqualibus residua majorum æqualium laterum invicem æquabuntur. Atqui residuæ illæ lineæ æquales perpendicula habent æqualia, medietates nempe dictarum subtensarum. Ergo rectæ lineæ, ab extremis talium ⊥lorum ad extrema residuarum ex majo-

ri latere linearum, extensæ, quæ dictorum $\triangle^{torum}$ bases sunt, inter se æquantur. Quod erat primo loco ostendendum.

II. PARS.

In duabus ultimis figuris si angulus in 5^a major sit eo angulo, qui à lateribus sigillatim æqualibus in 4^a figura comprehenditur; quoniam subtensa 5e figuræ major est subtensâ 4e, propter positam dictorum angulorum inæqualitatem, & rectę, ab harum subtensarum extremis ad $\perp^{la}$, in earum medio posita, ductæ æquales sunt ex hypothesi; ideò $\perp^{lum}$, quod à concursu duarum rectarum supra majorem subtensam existentium in illam majorem demittitur, ut in 5^a figura accidit, minus est $\perp^{lo}$, quod à concursu duorum radiorum supra minorem subtensam existentium in illam minorem cadit, ut in 4ª figura: & quia inæqualia illa $\perp^{la}$ partes sunt majorum in dictis $\triangle^{lis}$ laterum, per hypothesim æqualium; ablato ergo minori $\perp^{lo}$ à majore latere in 5^a fig. residua linea major erit eâ, quæ post ablatum ab æquali latere majus $\perp^{lum}$ in 4^a fig. superest.

Ultimò quoniam residua linea quintæ figuræ major est residuâ lineâ quartę, & $\perp^{lum}$ seu subtensæ medietas in 5^a figura majus est $\perp^{lo}$, hoc est subtensę medietate, in 4^a; Igitur in 5^a fig. recta linea majorem residuam cum majore $\perp^{lo}$ connectens, & quæ propositi in 5^a fig. $\triangle^{li}$ basis est, major erit rectâ lineâ minorem quartę fig. residuam lineam cum minore $\perp^{lo}$ nectente, hoc est base $\triangle^{li}$ in 4^a fig. propositi. Quod erat 2° loco probandum.

APPENDIX.

Quoniam in 1^a parte hujus probatum est $\triangle^{la}$, quibus duo latera sigillatim sumpta, & anguli, ab his lateribus comprehensi, invicem æquantur, bases habere ęquales; igitur hujusmodi $\triangle^{la}$ inter se ęquilatera sunt; ergo etiam ęqualia, & ęquiangula per antè probata.

COROLLARIUM VII.

Ex $\perp^{li}$ natura manifestum est (*vide 4^{am} figuram propositionis*

positionis elementaris) punctum O, in quo perpendiculum BO subtensam CD contingit, intra circulum BDC cadere, quoniam perpendiculum brevius est utrolibet radiorum dictam subtensam concludentium, & consequenter ad peripheriam usque non pertingit, hoc est, ejus extremum punctum O, quod subtensæ CD medium efficit, intra circulum cadit. Sed omnes rectæ lineę, à centro circuli ad quælibet dictæ subtendentis puncta, ultimis exceptis, productæ utrolibet concludentium radiorum etiam breviores sunt, quippe perpendiculo BO propiores (ut probatum est ad circuli definitionem). Ipsæ igitur extremis suis peripheriam non attingunt; & ideò cuncta dictæ subtensæ puncta ultimis exceptis, quæ linearum, intra nominatos radios conclusarum, extrema sunt, intra circulum cadunt.

Atque hinc formatur, & confirmatur sequens propositio.

Si quilibet arcus, vel duo quævis puncta in circuli peripheria sumantur, recta sumptum hunc arcum subtendens, vel accepta hæc puncta connectens, intra circulum cadit. ut probatum est.

CONSECTARIUM I.

Eodem artificio probabis rectam, diametri, sive radii extremitati perpendiculariter insistentem, totam extra circulum cadere, & ipsum in unico puncto contingere.

Nam si ex utraque perpendicularis radii parte rectas lineas, à circuli centro, in rectam diametro perpendicularem demittas, tunc perpendicularis radius semper erit demissâ qualibet remotiore lineâ brevior. Quare cùm perpendicularis radius extremitate sua circuli peripheriam attingat, omnes ab hoc ⊥^lo remotæ rectæ, & ipso propterea ⊥^lo longiores, extra circuli peripheriam protenduntur; & consequenter omnes omnium rectarum linearum à centro circuli in rectam diametro perpendicularem demissarum fines, excepto perpendicularis diametri termino, sive quod idem est, omnia rectæ lineæ diametro perpendiculariter insistentis puncta, præter

unicum, in circuli peripheria positum, videlicet ipsius perpendicularis diametri, sive radii finem, extra circuli peripheriam jaceant necesse est.

Enimverò si recta linea, quæ circulum in uno puncto tangit, in alio adhuc puncto tangere posset, sequeretur ex modò probatis partem illam contingentis, quæ inter illa duo puncta posita foret, intra circulum cadere; quare circulum secaret, contra hypothesim.

Hinc etiam sequitur circuli radium, in rectam circulum ipsum contingentem, & ad contactus punctum, demissum ipsi contingenti perpendiculariter insistere.

Nam ex antecedente consectario fit manifestum, rectam quamlibet circulum contingentem eum in unico puncto tangere, reliqua verò contingentis puncta extra circuli peripheriam posita esse, & quod sequitur, omnes rectas à circuli centro ad contingentem ductiles, excepto perpendiculari radio extra circuli peripheriam longiùs abire, sive ipsas perpendiculari radio longiores esse. Quare circuli radius, contingenti, in ipso contactus puncto occurrens brevissima erit linea omnium à circuli centro ad contingentem ductilium; Ideoque contingenti perpendiculariter insistet, ut patet ex probatis ad definitionem ⊥li.

CONSECTARIUM II.

Si circulum quæpiam recta contingat, & à contactu in hanc contingentem ⊥lum excitetur ad partes circuli, in excitato perpendiculo circuli centrum positum est.

DEMONSTRATIO.

Certum est ex proximè demonstratis, actam à circuli centro ad punctum contactus rectam lineam ipsi contingenti perpendiculariter insistere. Atqui ad punctum contactus unicum ⊥lum excitari potest (*ut in libro definitionum conclusum est.*) Igitur in excitato ad contingentem, & ad ipsum contactus punctum ⊥lo circuli centrum inveniri necesse est.

APPENDIX I.

Hinc methodus elicitur, in data recta linea circulum contingente, contactus punctum inveniendi.

Demissus enim à circuli centro in datam contingentem perpendicularis radius eam in contactus puncto secabit. Nam probatum est circuli centrum, in ⊥lo supra contingentem & ad contactus punctum erecto, positum esse, nec plura ⊥la ab eodem puncto ad eandem rectam duci possunt. Ductum igitur à circuli centro in propositam contingentem ⊥lum necessariò per quæsitum contactus punctum transibit.

APPENDIX II.

Hinc etiam dependet methodus à dato in circuli peripheria puncto rectam lineam ducendi, quæ datum tangat circulum.

Nam si super ductam à circuli centro ad datum punctum rectam lineam, atque à dato puncto, quod nempe ductæ lineæ extremum est perpendiculum erigatur, absolutum erit negotium. Erecta namque perpendicularis illa datum circulum, in dato puncto continget, ut probatorum necessitas evincit.

APPENDIX III.

Per hoc etiam consectarium facilè probabitur rectam lineam, circulorum intus se contingentium centra nectentem, & quantum opus est productam, in contactum circulorum cadere.

CONSTRUCTIO, ET DEMONSTRATIO.

Ductâ enim per punctum mutui circulorum occursus rectâ lineâ majorem circulum contingente, juxta præcedentem doctrinam. Primò manifestum est ductam hanc ad majorem circulum contingentem rectam lineam, minoris etiam circuli contingentem fore. Nam tota extra majoris circuli circumferentiam cadit, ex notione contingentiæ, quantò magis igitur extra minoris peripheriam, in majoris peripheria conclusam? Deinde ipsum

minorem circulum in dicto mutui circulorum occursus puncto contingit. Quoniam ergo ducta recta linea propositos binos circulos in eodem puncto contingit. Sequitur ex mox probatis ambo contiguorum circulorum centra in eodem (unico dumtaxat existente) ⊥^lo, supra dictam contingentem, & ad punctum mutui circulorum occursus, erecto posita esse: quamobrem recta linea, circulorum intus se contingentium centra connectens, pars est ⊥^li dictam contingentem in mutui circulorum occursus puncto secantis, & consequenter connectens illa recta linea, quantum opus est producta, nominatum perpendiculum absolvet, hoc est in circulorum contactum cadet. Quod autem ad aliud punctum minimè pervenire possit, inde evidens est, quod duæ rectæ commune segmentum habere nequeant, quod profectò accideret si recta linea propositorum circulorum centra connectens, & in ipsorum contactum cadens, aliorsùm adhuc divergeret. Unde modis omnibus verum est rectam lineam, circulorum intus se contingentium centra nectentem, in contactum circulorum cadere. Quod erat ostendendum.

ELEMENTUM TERTIUM.

ELEMENTARIS PROPOSITIO.

Duæ rectæ lineæ parallelæ sunt quando recta ipsas secans internos, & ab eadem parte constitutos angulos duobus rectis adæquat; vel quando alternos inter se pares efficit; vel quando internum externo contraposito reddit æqualem.

PRIMA PARS.

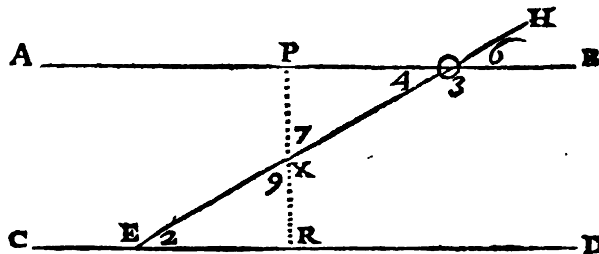
DETERMINATIO CASUUM.

VEL bini interiores, & ab eadem parte existentes anguli inter propositas rectas à secante generati, necnon per hypothesim duobus rectis æquivalentes, inter se pares sunt; vel certè unus altero major est, quamvis ambo simul sumpti duos rectos adæquent.

Demonstratio in 1° casu.

Utraque propoſitarum rectarum ad ſecantem perpendicularis eſt propter conceſſam $\angle^{lorum}$ à propoſitis rectis lineis ad ſecantem rectitudinem. Quapropter ſumptis propoſitarum rectarum alterutra pro ſubjecta, & ſecante pro perpendiculo parallelarum deſcriptore, punctum in quo altera propoſitarum rectarum à ſecante dividitur, per convenientem ipſius ſecantis, ſive dicti perpendiculi, parallelarum deſcriptoris motionem, rectam lineam deſcribet, alteri lineæ, quæ pro ſubjecta poſita eſt parallelam, & ipſi ſecanti lineæ perpendicularem (*ex notitia generationis perpendiculi*). Atqui ſecunda ex propoſitis lineis, per nominatum punctum tranſiens, ipſi ſecanti perpendiculariter inſiſtit, ut ab hujus demonſtrationis initio concluſum eſt, neque ab eodem puncto ad eandem rectam duo $\perp^{la}$ dirigi poſſunt (*ex probatis ad definitionem* $\perp^{li}$.) Igitur recta linea, quam dictum punctum deſcribet, eadem omninò eſt quàm propoſitarum ſecunda, & conſequenter illa ſecunda primæ pro ſubjecta poſitæ parallela eſt.

Secundus Casus. Datum.



Jam recta E H, ſecans rectas A B & CD, internos, & ab eadem parte conſtitutos $\angle^{los}$ 2, & 3 duobus rectis æquales efficiat.

Quæsitum. Dico A B = CD.

Constructio.

Biſecetur recta E O in puncto X, à quo in alterutram parallelarum, ut A B ducatur $\perp^{lum}$ XP: tum facto E R æquali P O agatur X R.

DEMONSTRATIO.

Tam $\angle^{li}$ 2 & 3, quàm $\angle^{li}$ 3 & 4 valent duos rectos (1um *ex hypothesi*, 2um *ex elemento* 1°.) Ergo $\angle^{li}$ 2 & 3 Π $\angle^{lis}$ 3 & 4; & ablato cummuni $\angle^{lo}$ 3 reliquus $\angle^{lus}$ 2 æquatur reliquo $\angle^{lo}$ 4. Sed latera X E, & E R æquantur lateribus X O, & P O sigillatim sumptis (*per constructionem*). Quum igitur duo $\triangle^{la}$ E X R, & X P O duo latera duobus lateribus æqualia, & $\angle^{los}$ ab his lateribus comprehensos æquales habeant, reliqui $\angle^{li}$, videlicet qui ad P & R existunt, & oppositi ad X, nimirum 7 & 9 invicem æquabuntur (*ex probatis in elemento* 3°). Sed $\angle^{lus}$ ad P rectus est, propter X P ad A B perpendicularitatem. Ergo $\angle^{lus}$ ad R existens etiam rectus erit. Quoniam verò rectæ P X, & X R, ab oppositis rectæ H E partibus ductæ, & ad ipsius punctum X concurrentes contrapositos $\angle^{los}$ 7 & 9 æquales efficiunt; Idcircò duæ ductæ P X, & X R unicam P X R constituunt, (*ex probatis in elemento* 1°) quæ cùm propositas lineas A B & C D ad $\angle^{los}$ rectos secet in punctis P & R, ut ostensum est, sequitur rectas A B & C D invicem parallelas esse, ut priùs.

SECUNDA PARS.

DATUM.

In rectas A B, & C D (*vide superiorem figuram*) cadens recta H E 1° alternos $\angle^{los}$ 2 & 4 inter se pares; 2° externum $\angle^{lum}$ 6, opposito interno 2 æqualem efficiat.

QUÆSITUM.

Oportet ostendere A B $=$ C D.

DEMONSTRATIO.

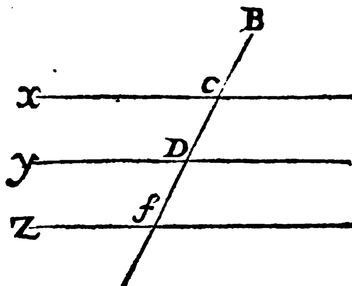
1°, Ex hypothesi $\angle^{lus}$ 2 Π $\angle^{lo}$ 4, & addito communi $\angle^{lo}$ 3, fient anguli 2 + 3 Π ($\angle^{lis}$ 3 + 4 Π) duobus rectis (*per elementum* 1um.) Ergo A B $=$ C D per primam partem hujus.

2°, Ex hypothesi $\angle^{lus}$ 2 Π ($\angle^{lo}$ 6 Π) $\angle^{lo}$ 4; Ergo A B $=$ C D per mox probata.

VEL SIC; Ex hypothesi $\angle$lus 6 $\sqcap$ $\angle$lo 2, & addito commmni $\angle$lo 3 fient interni $\angle$li 2 + 3 $\sqcap$ ($\angle$lis 3 + 6 $\sqcap$) duobus rectis. Ergo AB = CD.

COROLLARIUM I.

Rectæ lineæ eidem rectæ parallelæ, & inter se parallelæ sunt.



DATUM.

Esto *xc* = *yD*, & *yD* = *zf*.

QUÆSITUM.

Dico *xc* = *zf*.

DEMONSTRATIO.

Ex hypot. est *xc* = *yD*; Ergo $\angle$lus *Bcx* $\sqcap$ $\angle$lo *cDy*. Pariter ex hypot. est *yD* = *zf*; Ergo ($\angle$lus *cDy* $\sqcap$) $\angle$ *Bcx* $\sqcap$ $\angle$lo *Dfz*, externus interno. Ergo *xc* = *zf*. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM II.

Hinc generalis methodus habetur rectam lineam alteri datæ parallelam, vel utcumque, vel per datum punctum transeuntem, vel dato intervallo ab altera distantem, ducendi.

Nam 1°, si à sumpto quolibet supra datam rectam lineam puncto, quando nullum assignatur, vel quando assignatur, à dato puncto ad quodvis punctum in data recta linea positum agatur recta, subjectam datam utcumque secans: Atque ad assumptum punctum, quod nempe in secante situm est, ponatur $\angle$lus æqualis uni $\angle$lorum, ad punctum occursus ductæ secantis cum data recta genitorum, ita ut fiant $\angle$li alterni invicem, vel duo interni, & ab eadem parte constituti, duobus rectis æquales, vel tandem ut externus $\angle$lus interno, & ab eadem parte constituto æquetur, erit recta linea dictum $\angle$lum

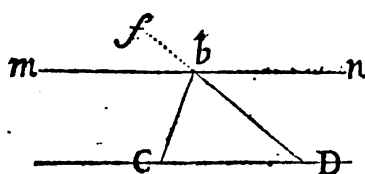
cum nominata secante, & ad assumptum punctum efficiens datæ rectæ parallela.

2°, Si futurarum parallelarum distantia detur, tunc super datam rectam lineam ⊥lum erigatur, in quo mensuretur recta datæ distantiæ æqualis, super quam ab altero ejus extremo perpendicularis ducatur, ea erit datæ rectæ parallela, ut manifestum fit ex probatis.

COROLLARIUM III.

Cujuscumque trianguli tres anguli interni duobus rectis æquantur, & si producatur unum latus, externus angulus duobus internis, & oppositis æqualis erit.

DATUM.



Esto quodvis △lum *b* C D, cujus unum latus D *b* producatur usque ad *f*.

QUÆSITA.

Dico 1° hujus △li tres angulos internos, videlicet ∠ *b* C D + ∠ C *b* D + ∠ *b* D C ⊓ duobus ∠lis rectis.

2°, Externum ∠lum *f b* C ⊓ ∠ *b* C D + ∠ *b* D C, qui ∠li sunt interni, & oppositi.

PRÆPARATIO.

Per punctum *b* ducatur *m n* = C D.

DEMONSTRATIO.

Ex probatis ∠lus *m b* C ⊓ ∠lo *b c* D, & ∠lus *n b* D ⊓ ∠lo *b* D C (*ob rectarum* C D *&* *mn parallelismum.*) Ergo ∠lus *m b* C + ∠lo *n b* D ⊓ ∠lo *b* C D + ∠lo *b* D C, & addito utrimque ∠lo C *b* D fiunt ∠ C *b* D + ∠ *b* C D + ∠ *b* D C ⊓ (∠ *m b* C + ∠ C *b* D + ∠ D *b n* ⊓) duobus ∠lis rectis.

2°, ∠lus *f b m* ⊓ ∠lo *b* D C, & ∠lus *m b* C ⊓ ∠lo *b* C D (*quoniam ut prius* *m n* = C D.) Ergo totus ∠lus *f b* C ⊓ ∠lo *b* C D + ∠lo *b* D C, qui duo ∠li sunt interni & oppositi, ut erat ostendendum.

APPENDIX

APPENDIX I.

Itaque 1°, *Cognitis cujuscumque trianguli duobus angulis tertius non poterit ignorari; ipse enim est duorum rectorum angulorum differentia à duobus datis angulis simul sumptis.*

2°, *In quovis triangulo si unus angulus sit obtusus, duo reliqui simul sumpti minores erunt uno recto; si verò unus angulus sit rectus, summa duorum reliquorum æquabitur uni recto.*

APPENDIX II.

Hinc etiam sequitur, *Perpendiculum à quovis rectæ lineæ, super aliam obliquè jacentis puncto in subjectam demissum ad partes anguli acuti cadere.*

Nam si ad partes obtusi caderet, fieret $\triangle^{lum}$, cujus unus $\angle^{lus}$ esset rectus, alter verò obtusus, quod est impossibile ex mox probatis.

APPENDIX III.

I. FONS INVENTIONIS.

Quoniam ex sumpto in qualibet figura rectilinea quovis puncto ad omnes figuræ $\angle^{los}$ duci possunt rectæ lineæ, quæ figuram in tot $\triangle^{la}$ dividant quot ipsa habet latera; horumque $\triangle^{lorum}$ $\angle^{li}$, quatuor exceptis, circa acceptum punctum existentibus, iidem omninò sunt, quàm figuræ $\angle^{li}$, ac 1ª figurarum est trilatera, cujus interiores anguli omnes duobus rectis æquantur. Ideò

1°, *Figura quævis rectilinea dividitur in triangula duobus pauciora quam est numerus, laterum figuram continentium.*

Sic quandrangulum dividitur in duo $\triangle^{la}$, quinquangulum in tria, &c.

2°, *Si è numero laterum cujusvis figuræ rectilineæ tollatur 2, & reliquus numerus duplicetur; vel si è numero laterum duplicato tollatur 4, habebis summam angulorum rectorum in rectilinea quavis figura interius comprehensorum.*

Sic triangulum in se continet duos rectos, quadrangulum quatuor, quinquangulum sex, &c.

II. FONS INVENTIONIS.

Quoniam verò productis omnibus cujusvis rectilineæ figuræ lateribus anguli tam interni, quàm externi tot binis rectis angulis æquantur, quot sunt figuræ latera (*per Elementum* 1um) ostensumque sit interiores cujuslibet figuræ angulos, si quatuor excipias, æquales esse tot binis angulis rectis, quot in figura latera numerantur. Igitur

Figuræ cujusvis rectilineæ anguli exteriores omnes æquantur quatuor rectis angulis.

Deinde quoniam in figura ordinata tot sunt exteriores anguli invicem æquales, quot figuræ latera. Ideo

Si quatuor anguli recti dividantur per numerum laterum, sive angulorum: quotus erit quantitas unius anguli exterioris in figura ordinata.

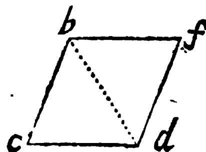
Sic ∠lus exterior in trigono ordinato, sive æquilatero est $\frac{4}{3}$ ∠li recti, sive gradus $\frac{360}{3}$, in tetragono ordinato sive in quadrato $\frac{4}{4}$ ∠li recti, sive gradus $\frac{360}{4}$, &c.

Et quia in figura ordinata summa unius ∠li exterioris, & unius interioris duobus ∠lis rectis æquatur, suntque omnes interiores ∠li invicem æquales. Ideò

Si quantitas unius anguli exterioris tollatur è duobus rectis: Vel si summa angulorum rectorum intus positorum dividatur per numerum laterum; habebis quantitatem unius anguli interioris in figura ordinata.

COROLLARIUM IV.

Rectæ lineæ, quæ æquales rectas, & parallelas ex adverso connectunt, etiam æquales sunt & parallelæ.



DATUM.

Sunto duæ rectæ *df*, & *bo* invicem æquales & parallelæ, quæ duabus rectis *bf* & *od* ex adverso nectantur.

QUÆSITUM.

Dico connectentes rectas *bf* & *od* inter se æquales esse, & parallelas.

DEMONSTRATIO.

Ductâ rectâ *bd*; Quoniam *df* = *bo*; ideò ∠^{lus} *fdb* ⊓ ∠^{lo} *obd*. In △^{lis} autem *dbo*, *dfb* latera *df*, & *bo* æqualia sunt, (*ex hypothesi*) & latus *bd* commune, & ∠^{li} *obd* & *fdb* ostensi sunt æquales; quare (*per elementi tertii doctrinam*) basis *bf* basi *do*, & ∠^{lus} *bdo*, ∠^{lo} *fbd* çquabitur, qui cùm sint alterni respectu linearum *bf*, & *do*; propterea rectæ *bf* & *do*, ex probatis æquales, etiam inter se parallelæ sunt, (*per hoc elementum* 3um) sicut erat ostendendum.

APPENDIX.

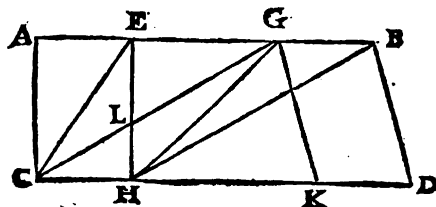
In quovis parallelogrammo oppositi anguli, & latera æqualia sunt, & ipsum diameter bifariam dividit.

Nam probatum est quadrilaterum *bd* parallelogrammum esse, in quo (∠^{li} *bdo* & *bdf* ⊓) ∠ *odf* ⊓ (∠ *obd*, & *dbf* ⊓) ∠ *obf*, sicut est ostensum, & eâdem argumentatione probabitur ∠^{lus} *dfb* ⊓ ∠^{lo} *bod*. Quare cùm ipsum parallelogrammum in duo △^{la} æqualia à diametro *bd* dividi suprà viderimus, patet propositum.

COROLLARIUM V.

Tam parallelogramma, quàm triangula super eadem basi, vel super æqualibus basibus, & inter easdem parallelas constituta, inter se æqualia sunt.

PRIMA PARS.



DATUM.

Super eadem basi CH, & inter easdem parallelas AB, CD constituta sint duo parallelogrãma AH, & CB.

QUÆSITUM.

Dico parallelogramma A H, & C B invicem æquari.

DEMONSTRATIO.

$\triangle^{la}$ A C G, E H B inter se æquilatera sunt (nam A C $\sqcap$ E H, & C G $\sqcap$ H B, atque etiam A E $\sqcap$ (C H $\sqcap$) G B per mox probata, & utrimque addita E G fit A G $\sqcap$ E B); Ergo etiam æqualia: & dempto communi $\triangle^{lo}$ E L G fiunt quadrilatera A C L E, L H B G æqualia: & utrimque addito $\triangle^{lo}$ C L H, erunt parallelogramma A H, & C B inter se æqualia, ut erat 1° ostendendum.

SECUNDA PARS.

DATUM.

Si verò super æqualibus basibus C H, & K D, & inter easdem parallelas A B, C D constituta fuerint duo parallelogramma A H, & G D.

QUÆSITUM.

Dico parallelogramma A H, & G D inter se pariter æquari.

DEMONSTRATIO.

Ductis enim rectis C G, H B, ostendetur, ut priùs, tam parallelogrammum A H, quàm parallelogrammum G D æquari parallelogrammo C B; ergo parallelogramma A H, & G D inter se æqualia sunt, ut erat secundò ostendendum.

PARS III.

Denique quia triangula parallelogrammorum eandem basim, & communem angulum habentium dimidia sunt, ut ostensum est, suntque illa parallelogramma inter se æqualia per mox probata, manifesta est propositionis tertia pars.

APPENDIX.

FONS INVENTIONIS.

Quoniam ex hujus corollarii demonstratione sequitur parallelogrammum quodcumque æquari rectangulo,

eandem basim, & eandem altitudinem habente, triangulum verò æquari rectangulo eandem altitudinem & dimidiam basim habente: Propositis igitur quotcumque parallelogrammis, vel triangulis, quorum primi basis vocetur B, secundi β, communis altitudo P, rectangula propositis parallelogrammis æqualia erunt $P \times B$, & $P \times \beta$: At rectangula propositis $\triangle^{lis}$ æqualia erunt $P \times \frac{1}{2} B$, & $P \times \frac{1}{2} \beta$. Atque per proportionum doctrinam fit

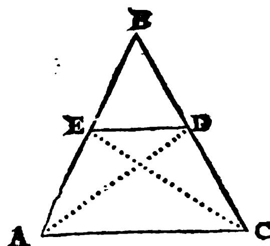
$P \times B. P \times \beta :: B. \beta$ vel $P \times \frac{1}{2} B. P \times \frac{1}{2} \beta :: \left(\frac{1}{2} B. \frac{1}{2} \beta :: \right) B. \beta$. Ergo

INVENTUM.

Tam parallelogramma, quàm triangula æquialta se habent inter se ut bases: & si sint in ratione basium, sunt æquialta, ut ostensum est.

COROLLARIUM VI.

Quæ ad unum trianguli latus in ipso triangulo parallela ducitur, proportionaliter secat dicti trianguli latera: & si quædam recta linea, per ipsum triangulum transiens proportionaliter secet trianguli latera, ipsa erit ad reliquum latus parallela.



DATUM I.

Offeratur $\triangle^{lum}$ ABC, in quo recta ED, lateri AC parallela ducta sit.

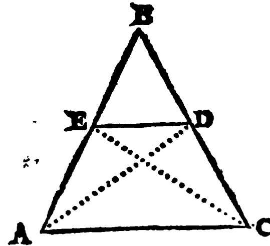
QUÆSITUM.

Dico latera AB, & BC proportionaliter secari in punctis E & D, hoc est AE. EB :: CD. DB.

DEMONSTRATIO.

Ductis rectis AD, EC fit $\triangle^{lum}$ ADE $\sqcap$ $\triangle^{lo}$ EDC (nam ambo $\triangle^{la}$ super eadem basi ED, & inter easdem

parallelas A C, E D constituta sunt.) Ergo (△ A D E. △ B E D ::) A E. E B :: (△ E D C. △ B E D ::) C D. D B. Quod est 1um.



DATUM II.

Iam sit A E. E B :: C D. D B.

QUÆSITUM.

Oportet ostendere E D = A C.

DEMONSTRATIO.

Ductis ut priùs rectis A D, E C. Ex hypothesi (A E. E B ::) △ A E D. △ B E D :: (C D. D B ::) △ C E D. △ B E D. Quum ergo △la A E D, & C E D ad idem △ B E D eandem rationem habeant, inter se propterea æqualia sunt, & quoniam super eadem basi E D, & ex eadem parte constituta sunt, ideò inter easdē parallelas E D, A C existunt, quod erat secundo loco ostendendum.

APPENDIX.

Apparet in diagrammate superiori minus △lum B E D, à majori △lo A B C per ductam parallelam E D abscissum, æquiangulum esse cum dicto majore A B C. Nam ex notitia parallelismi exteriores anguli B E D, B D E, interioribus B A C, B C A æquales sunt.

FONS INVENTIONIS.

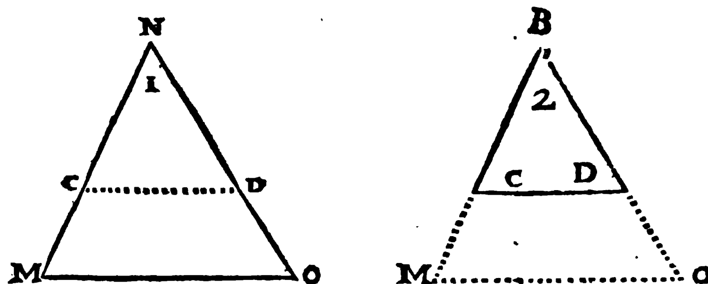
Ex propositis duobus inæqualibus triangulis, inter se æquiangulis, si majoris latera longitudine correspondentium laterum minoris contrahantur; vel si minoris latera longitudine correspondentium laterum majoris producantur, & contractionis, vel prolongationis puncta rectâ lineâ jungantur, manifestum est ex contractis, vel productis lateribus fieri triangulum, reliquo è propositis △lis, ęquale. Unde per ante probata ostendetur proposita triangula, ob positum in eis æquiangulismū proportionalia habere latera. Ex hoc enim æquiangulismo nascitur parallelismus inter basim producti, vel contracti trian-

guli, & inter basim alterius, per dictam contractionem, aut productionem priori adnascentis, hoc est inter rectam productionis, vel contractionis puncta nectentem.

Si verò proposita Δla proportionalia habeant latera; unius lateribus, ut ante, alterius correspondentium laterum longitudine contractis, vel productis, ductâque ad puncta contractionis, vel productionis rectâ lineâ; probabitur, ut superiùs ex posita proportione inter dictorum Δlorum latera, ad unum è propositis Δlis aliud æquale, & alteri proposito simile per dictam productionem vel contractionem adnasci, & prioris latera per basim hujus insitivi proportionaliter secari. Unde inter has bases parallelismus ex probatis, & tandem propositorum triangulorum æquiangulismus ex parallelarum natura ostendetur.

Hinc formatur & confirmatur sequens propositio.

Triangula inter se æquiangula proportionalia habent latera: Quæ verò proportionalia habent latera inter se æquiangula sunt.



DATUM.

Sunto duo Δla MNO majus, & CBD minus, quorum singuli anguli ad puncta M, N, O existentes æquentur singulis angulis ad puncta C, B, D existentibus.

QUÆSITUM.

Oportet ostendere correspondentibus $\angle^{lis}$ adjacentia latera proportionalia esse, hoc est ut latera M N, M O circa $\angle^{lum}$ M existentia se habent ad invicem, ita se habere inter se latera C B, C D, correspondenti $\angle^{lo}$ C adjacentia & O M. O N :: B D. C D, atque etiam M N. O N :: C B. D B.

CONSTRUCTIO.

In 1ª figura contrahantur majoris $\triangle^{li}$ latera longitudine correspondentium minoris $\triangle^{li}$ laterum, circa æqualem angulum existentium, ita ut ex contractis majoris $\triangle^{li}$ lateribus ad puncta C & D, atque ex ducta C D oriatur in eo $\triangle^{lum}$ C N D, quod cùm minore $\triangle^{lo}$ C B D æquiangulum est: (nam ex constructione C N $\sqcap$ C B, & D N $\sqcap$ D B; atque $\angle$ N $\sqcap$ $\angle$ B. Quare & basis basi æquatur & $\triangle^{lum}$ $\triangle^{lo}$ æquiangulum est). Vel ut in 2ª fig. protrahantur minoris $\triangle^{li}$ latera longitudine correspondentium majoris $\triangle^{li}$ laterum circa æqualem angulum existentium, ita ut ex productis minoris $\triangle^{li}$ lateribus ad puncta M & O, atque ex ducta M O formetur $\triangle^{lum}$ M B O, quod etiam ob allatas rationes, cum majore $\triangle^{lo}$ M N O æquiangulum est.

DEMONSTRATIO.

Ex hypothesi æquiangulismus est inter $\triangle^{la}$ M N O & C B D, & per constructionem æquiangulismus est etiam inter $\triangle^{la}$ C N D & C B D. Æquiangulismus igitur erit inter $\triangle^{la}$ C N D, M N O. Quare $\angle^{lus}$ N C D $\sqcap$ $\angle^{lo}$ N M O, & consequenter C D = M O. Ergo per antè probata M N. C N :: O N. D N, & alterne M N. O N :: (C N. O N $\sqcap$) B C. B D. Eadem prorsus argumentatione concludetur M N. M O :: B C. C D, vel O N. O M :: B D. D C. Si latera M N, M O, vel O M, O N contrahantur longitudine correspondentium minoris $\triangle^{li}$ laterum B C, C D. vel B D, D C. Nec solùm in contracto majori $\triangle^{lo}$ locum habet hæc argumentatio, verùm etiam in convenienter producto minori $\triangle^{lo}$ idem omninò evincit, ut perspicuum est. Ergo vera est propositio.

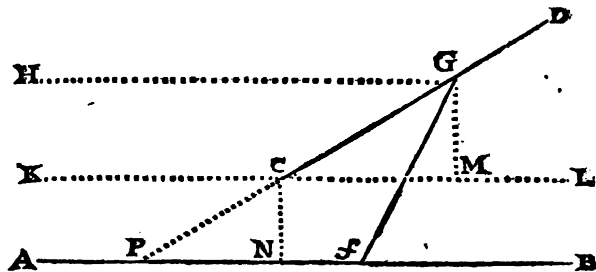
ELEMEN-

ELEMENTUM QUARTUM.

De Imparallelismo.

PROPOSITIO ELEMENTARIS.

CUm in duas rectas recta incidens internos, & ab eadem parte positos angulos duobus rectis minores fecerit, imparallelæ sunt hæ duæ rectæ lineæ; & si producantur, sibi mutuò occurrent versus eam partem, in qua positi sunt anguli duobus rectis minores, sive quod idem est, versus eam partem, ubi reperitur earum intervallum angustius.



DATUM.

In rectas A B, & C D incidens recta *f* G internos, & ab eadem parte positos angulos C G *f*, & G *f* N duobus rectis minores faciat.

QUÆSITUM.

Dico lineas A B, & C D, quantum opus est productas, sibi invicem occursuras esse versus partem C & A in qua positi sunt anguli C G *f*, & G *f* N duobus rectis minores.

CONSTRUCTIO.

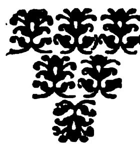
Per punctum C extremum rectæ C D, agatur ipsi A B parallela K L, ex utraque parte indefinitè producta: & per punctum G ducatur eidem A B altera parallela

S

HG, quæ necessariò supra rectam CG cadet, vel infra quam punctum C sive recta CG existet, nimirum ob faciendam ∠lorum HG*f*, & G*f*N summam duobus rectis æqualem, & consequenter duobus hypotheticis ∠lis CG*f*, & G*f*N majorem. Tum ex puncto C in rectam AB, si opus esset productam demittatur perpendiculum CN. Deinde, si recta G*f* ipsi KL ad angulos rectos non est, ex puncto G in subjectam KL etiam demittatur perpendiculum GM. Postremò ut ⊥lum GM ad suam basim CM, ita fiat perpendiculum CN ad basim NP; jungaturque PC.

DEMONSTRATIO.

△la CGM & CPN æquiangula sunt: (nam per constructionem anguli CMG, & CNP recti sunt, & fit GM. MC :: CN. NP.) Ergo ∠lus GCM æquatur correspondenti ∠lo CPN, (ut probatum est in Elemento 3°.) id est alterno KCP (propter positum inter rectas AB & KC parallelismum:) & sic ∠lus GCM Π ∠lo KCP. Quare cùm ad rectam KC, & ad punctum C in ea existens duæ rectæ DC, PC ab oppositis partibus ductæ contrapositos ad verticem ∠los GCM, & KCP æquales efficiant, hæ ductæ DC & PC sibi erunt in directum (ex probatis in Elemento 1°,) hoc est recta DC continuata pertinget ad punctum P, in recta AB existens. Concurrent igitur propositæ rectæ ad punctum M, ut volebat propositio.



OBSERVATIONES
IN HÆC ELEMENTA GEOMETRICA.

QUIBUS è fontibus universalis Matheseos tam theoria, quàm praxis duceretur, tum etiam quibus præceptis inventa singula indigerent, & adhuc quâ methodo tradi deberent, superiùs exposuimus, & rem ipsam maxima ex parte confecimus. Nunc verò, postquàm Definitiones, atque Elementa Geometrica sunt explicata, dicendum restat de illorum utilitate, ac ostendendum cuncta geometrica ex ipsis per viam demonstrationis exsurgere, quemadmodum ex physicis Elementis naturalia cuncta per viam generationis existunt.

Primò itaque si recordemur eorum, quæ hujus capitis initio de vario rectarum linearum inter se situ dicta sunt, ac in mentem revocemus ex transverso rectæ lineæ motu planum generari; atque in figuris rectilineis nihil aliud considerari posse quàm angulorum ab earum lateribus factorum diversitatem, hoc est rectitudinem, aut obliquitatem; aut certè diversas laterum ad se invicem positiones, id est ipsarum parallelismum, aut imparallelismum, omninò persuasum habebimus geometricam planorum, sive figurarum rectilinearum scientiam à rectarum linearum coincidentia, vel perpendicularitate, vel parallelismo, vel imparallelismo derivari. Deinde verò quia in illis solidis quorum extrema plana sunt, nihil etiam aliud ad considerandum relinquitur, quàm comprehensi ab ambientibus planis anguli, qui pariter recti sunt, aut obliqui: aut certè variæ planorum ambientium inter se positiones, hoc est eorum parallelismus vel imparallelismus; Itaque solidorum ∠lorum obliquitas, aut rectitudo, vel ambientium planorum parallelismus, aut imparallelismus rectis tantùm lineis, quæ certo modo in ipsis planis ducuntur, observabilis, & mensurabilis est, ut ex definitionibus Euclidis clarè percipitur, minimè dubitabimus

omnem, quę geometricis auxiliis acquiri potest, dictorum solidorum cognitionem ab enumeratis, & explicatis planorum Elementis ortum habere. Quantum autem ad curvilinea spectat, quum illa non cognoscantur nisi per relationem quam habent curvarum linearum puncta ad rectas lineas, audacter concludamus illud omne, quod solâ geometricæ facultatis vi demonstrari potest, à sæpiùs nominatis Elementis, nimirum rectarum linearum coincidentia, vel perpendicularitate, vel parallelismo, vel imparallelismo sic dependere, ut geometrica certitudo extra horum fines frustra quæratur. Neque enim geometrica appellare debemus quæ utrique quantitatis speciei communia sunt, ut ea quæ magnitudinibus accidunt ob earum æqualitates, vel inæqualitates, vel sectiones, vel proportiones, vel commensurabilitatem. Incommensurabilitas verò quamvis à magnitudinis essentia proficiscatur, quia tamen numericum quid in conceptu suo involuit, daturque numerorum quædam species surdis magnitudinibus exprimendis naturâ suâ idonea, meliùs profectò est hanc quantitatis affectionem universalibus matheseos principiis, sicut fecimus, annumerare, quàm illam in Geometricorum Elementorum loco reponere.

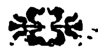
Sic ergo à quatuor primis, & claris, & simplicissimis propositionibus, quarum probationes à præcedentibus definitionibus immediatè pendent, illa geometricarum conclusionum immensa moles exsurgit, firmatur, atque fundatur. Hoc porrò sic non est accipiendum, ut geometricæ demonstrationes ex solis elementis jam sæpius nominatis constare existimentur; nam earum maxima pars aliis ascitis, & ad utramque quantitatis speciem pertinentibus principiis, ut plurimum conficitur, sed solùm putandum est ut in inventionis fonte diximus, ab illis geometricæ facultatis Elementis geometricum robur accipere quidquid in mathematicis geometricam desiderat solutionem.

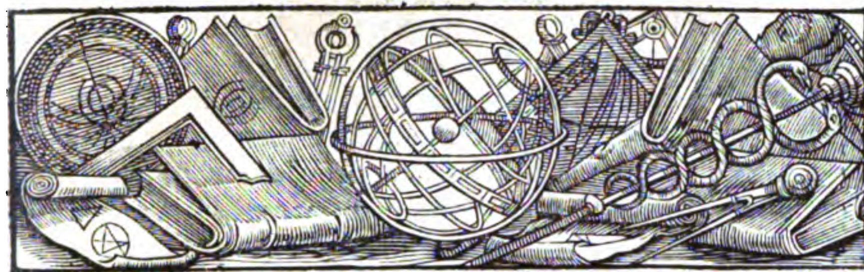
Stabilitis hac ratione certis quibusdam Geometriæ Elementis, & ad quatuor capita revocatis, nemo est,

ut opinor; qui illa non præferat ingenti illi Euclideorum Elementorum, confuso satis ordine dispositorum multitudini, tum quod ob exiguum eorum numerum faciliùs memoriæ mandentur, ac omnia geometrica virtute contineant, quæ in Elementis Euclideis habentur; tum præsertim quod oblato aliquo problemate, vel theoremate geometrico, in hæc pauca Geometriæ Elementa mentis acies facilè convertitur, & nullo ferè negotio cernitur à quonam geometriæ principio quæsiti demonstratio elici debeat. Atque in hoc maximè consistit inventorum Elementorum utilitas, quâ nulla major hac in re desiderari potest.

Neque sanè mirum videri debet quod Elementa nostra paucas propositiones contineant, multaque in illis desint, quæ apud Euclidem leguntur, nam Elementorum nomen tueri non possent, si, quæ ab eis pendent, etiam pro principiis haberentur. Id ratio & methodus exigit ut principia, quæ elementa vocavimus, seorsim tradantur, & à reliquis, quæ inde deduci possunt, accuratè distinguantur. Quare tantum abest ut expositis geometriæ elementis propositionum paucitas officiat, quin illa multò perfectiora evadant si solis quatuor propositionibus elementaribus absolvantur, & corollariis quibusdam exceptis, quæ sponte suâ ex nominatarum propositionum demonstrationibus colliguntur, vel quæ necessaria sunt ad sequentium probationem, reliqua, quæ paulò longiùs à principiis recedunt, omittantur. Verùm quia hisce geometricis Elementis ultimam in præsenti opere curam adhibere minimè decrevi, interea satis conveniens fore judicaui, si quædam non omninò necessaria passim insererem, ut eorum exemplo breviter ostenderem quomodo ab his Elementis geometricarum propositionum series educi, & quibus vinculis necti deberet. Nunc verò, ut eam methodum paucis attingam quâ geometrica suppellex abundè parari possit, maximè necessarium præceptum esto, ut ad cujusque rei naturam, atque generationem diligenter attendamus: Deinde ut agnitâ ejus constitutione, & generandi modo, quę

deinde proprietates consequantur, sagaci mentis indagine pervestigemus. Quod fiet (si modò nos intra vulgaris geometriæ limites recipere velimus) aut à datis punctis, & notis intervallis circulos vel arcus describendo, qui cognitas lineas secent, vel tangant: aut positas certo modo rectas lineas producendo, aliisve rectis connectendo: aut ad datas rectas, vel noviter ductas, parallelas, vel perpendiculares ducendo: aut certè aliquarum inferendo concursum ex noto in ipsis imparallelismo. Nam si posteà tam è tradita in elementis geometricis doctrina, quàm ex enumeratis universalis Matheseos principiis argumenta petantur, innumeræ ferè conclusiones, totidem propositionum effectrices non invitæ sequentur, atque sic paulatim accrescet geometriæ corpus. Verùm hac de re plura dicemus, cùm de Mathematicorum argumentorum sedibus ex professo sermonem instituemus. Cæterum in concinnandis demonstrationibus maximâ varietate delectatus sum; nam modò diffuso, modò contracto verborum apparatu sum usus, modò figuras aliquas, vel cum literis, vel sine literis, modò nullas adhibui. Idque eo præsertim consilio feci, ut omnes demonstrandi modos proponerem, & ex aliorum judicio discerem quisnam præ cęteris potior haberetur. Non enim hæc solùm mihi, sed etiam aliis scribo. Quidquid sit non propositiones tantùm, sed maximè earum inter se cohærentiam, & simul viam qua inveniri debeant ostendere ubique volui. Ideoque alias corollaria, eas nempe quæ ab elementaribus immediatè derivantur: alias verò appendices, seu consectaria, illas nimirum, quæ à corollariis originem ducunt, pro arbitrio nominavi, planè ut appareat hanc meam scriptionem, quam tantùm pro specimine exhibeo, recentem ingenii fœtum esse, & rudem adhuc molem, quæ meliorem formam aliquando sit acceptura.





SPECIMINVM MATHEMATICORVM LIBER SECVNDVS.

CAPVT PRIMVM.

De Methodo Compositionis atque Resolutionis.

INsita sunt mentibus nostris certa quædam veritatis semina, à Philosophis axiomata, communes animi notiones, vel propositiones æternæ veritatis nominata, à quibus omnis humana cognitio ducit originem. His veri primordiis, sive his, ut ita dicam, rationis elementis paulatim enatæ sunt artes, ac scientiæ; longæque illæ consecutionum series, quas disciplinas nominamus, è fœcundo eorumdem principiorum sinu eductæ prodierunt. Quapropter veritatis inveniendæ modum, quod argumentum vocatur, optimè procul dubio definiemus, si dicamus id esse orationem, in qua quibusdam positis aliud quid necessariò sequitur eò quòd hæc ita posita sunt. Duo enim hîc reperiri necesse est, unum antecedens, cujus cognitio vel per se evidens sit, quales sunt, ut jam diximus, propositiones æternæ veritatis, vel ante per demonstrationem acquisita: alterum consequens quod ex antecedentis positione infertur & certitudinem assumit. Sic suppositis

communibus animi notionibus, velut inconcussis argumentorum fundamentis, à simplicibus, & prioribus ad magis composita, & posteriora, sive à causa ad effectum: vel à magis compositis, & posterioribus ad simplicia, & priora, sive ab effectu ad causam, contrariis omninò ratiocinandi viis, naturalibus tamen, proceditur in investigatione veri. Prima methodus, quæ antecedentia nectit consequentibus, sive quæ causam cum effectu suo conjungit, quoniam id componendo fit veterum artificum idiomate synthetice appellata est; secundam verò, quæ nexum prioris cum posteriore ratiocinando dissolvit, sive quę causam ab effectu suo distinguit, quoniam id resolutionis opus est, Græci vocabulo significante Analyticen dixêre.

Compositionis methodum, sive synthesim observat natura in mixtorum generationibus, quæ exiguis profecta initiis, per continuas minutissimarum particularum sensus effugientium additiones lentissimis incrementis augentur, & justam molem demum adepta conspiciuntur.

Resolutionis verò methodo, sive Analysi utitur eadem rerum genitrix simul atque destrutrix in mixtorum interitu, vel corruptione, quæ vi lethi cohærentiam partium illorum superante, in ea principia, ex quibus composita erant, dissolvuntur.

Parum absimili ratione in propositionibus cujuscumque generis, iisque sive theorematis, sive problematis scientificè constituendis potissima demonstrandi methodus, & via omninò naturalis est, quâ à principiis, & elementis doctrinæ cujusque propriis, per continuatas consequentias componendo proceditur ad propositi confirmationem.

Quoniam autem sæpissimè accidit, in problematis præsertim fortuitò oblatis solvendis, ut logista mediis ad propositum arguendum idoneis destitutus, à scientię principiis, & elementis, naturali synthetices viâ ad problematis solutionem ratiocinio exquirendam, & concludendam procedere nequeat. In hujusmodi ignorationis ca-

su, qui ferè perpetuus est, viam capescit retrogradam, & primæ contrariam; facto namque initio ab eo quod in quæstione est, tanquam dato & concesso, continuatis consequentiis resolvendo progreditur donec in aliquod cognitum principium incidat, à quo quæsiti, quod 1° pro concesso assumptum erat, veritas deduci queat.

Contrariæ illæ ratiocinandi viæ ut ambæ à natura magistra institutæ sunt, ita æqualem certitudinis gradum obtinent: cùm enim in quavis argumentatione duo sint, ut jam notavimus, antecedens videlicet, & consequens; primumque causa existat secundi, tanquam ab eo procedentis effectus, cui propterea necessitatis vinculo astringitur, dubium non est quin æquè benè, & æquè facilè necessitas illa ostendatur dum à consequente inchoatur argumentatio, quàm dum ab antecedente initium ducit. Atque idcircò processum logicum per consequentia in utramque partem æquè firmum, atque apodicticum esse necesse est.

Sed cùm maximi momenti sit analytices, atque synthetices naturam penitùs novisse, quam ab authoribus satis explicatam non video, qui tantùm pro doctis scripsêre, ut ea quæ tam ab ipsis quàm à nobis super ea re dicta sunt, ab omnibus comprehendi possint, utar apposita, & valdè familiari comparatione, perceptionem nostram non parum adjuvante. Si quis ergo mechanicarum artium peritus machinam quandam exquisito artificio elaboratam, & in qua multùm industriæ posuisset, horologium, verbi gratiâ, ex multis rotis, tympanis, ponderibus, aliisque diversis partibus aptâ dispositione inter se nexis constructum, ei, qui priùs tale quid non vidisset, offerret, diceretque machinam hanc solis conversionem sic imitari, ut sua etiam motione horas diei tam justè, quàm celestis ille planeta dividat, indicetque. Homo ille rem admiratus, ut latens in machina artificium exquireret, rotas dentibus sibi invicem insertas, observatâ priùs earum ordinatione, atque dependentiâ, unas ab aliis sejungeret, facto à prima initio; tum pondera levaret; & sic solutis, quæ priùs inter se cohærebant machinæ parti-

bus, omnibusque diligenter inspectis, & attenta mente consideratis tandem concluderet machinæ motum à ponderibus appensis impulsionem, moderationem verò à librato pendulo habere, quæ tantò justior quantò rotarum structura, & conformatio melior atque concinnior. Idem omninò facit qui propositum problema analyticè resolvit, supponit enim jam constructum problema, sive factum esse quod postulatur, aptâque adhibitâ ratiocinatione quæsitum à datis, tum ipsa data inter se separat, quæ quidem omnia priùs in hypotheticam problematis structuram coïverant. Denique postquam acri studio investigavit, quomodo quæsitum à datis, aut ipsa data ab aliis cognitis pendeant, à quibus quæsiti veritas elici possit, non solùm quæsiti possibilitatem aut impossibilitatem arguit; verùm eò usque procedit ut impossibilitatis causas afferre, quando impossibile est quod proponitur, vel, si possibile est, varios modos, quibus id effici possit, reperire valeat.

Jam verò si resoluta dicti horologii compage eidem homini, cui novum, ut jam diximus, spectaculum foret horas indicans machina, rotis, tympanis, ponderibus, & reliquis ad horologii fabricam necessariis rebus, ipsius horologii loco separatim, & in ejus conspectu positis, primò dictum fuisset ex talium instrumentorum apparatu, aptâque dispositione machinam cōfici posse, solis cursum exactè metientem, ille statim naturali sciendi cupiditate incensus singula hæc vigilibus mentis oculis perlustrando, tum contrectando manibus, rotas rotis, ut sibi invicem sociari possunt, aptaret, quibus propria tympana adjiceret, pendulo supernè, vel ad latus posito, infraque appensis ponderibus; & si vis aliqua adesset ingenii omnia locis suis ita restitueret, & debito ordine disponeret, ut tandem redeunte compage prior machina consurgens, in perfectum ut fuerat horologium evaderet: in quo opere faciendo latens in machina artificium ex ipsa operandi forma, quamvis priori contraria, illi ut antè manifestum appareret.

Nunc si hujus machinæ tempora dimetientis effectum,

cum eo quod in problemate quæritur; & ea quæ data sunt, aliaque principia, quando illa quærere opus est, cum singulis horologii partibus à se invicem distinctis; atque latens artificium, quod dicti effectus causa est, & inveniri debet, cum problematis demonstratione conferre velimus, facile nobis erit syntheticum processum in problematibus demonstrandis, illiusq; discrimen ab analytico regressu dignoscere. Quemadmodum enim horologii constructio perfecta absolutaque censetur, quando appensi ponderis gravitate prima rota sociam quam motu suo dirigit, illaque secunda tertiam, & cæteræ cæteras sic impellunt, ut rotæ ultimæ impulsu agitatum pendulum varias diversarum, & magnitudine inter se discrepantium rotarum motiones libratione sua sic moderatur, ut inde æquabilis motus nascatur, cujus ope voluta acus eandem æquabilitatem in circumlatione sua custodiat: Ita etiam problema perfectè constructum, & plenè demonstratum est, cùm in aliquot consecutionum serie, quæ ad ejus probationem adhibetur, ex cogniti antecedentis alicujus principii veritate, omnium inde consequentium certitudo gradatim ducta, derivataque est, ita ut ex firmo plurium, probatarumque conclusionum nexu, id quod quæritur demonstrationis vim accipiat, & tandem his rationis machinis quod incognitum est, velut aliquo veritatis impulsu coactum, in cognitionem nostram perveniat. Atque hunc argumentandi modum ipsa procedendi ratio syntheticum esse declarat.

Est synthesis tradendis disciplinis, atque scientiis valdè accommodata; inventis namque, ac ritè positis alicujus scientiæ principiis, sive elementis facile est posteà plures conclusiones hinc deducere, quæ corpus illius scientiæ componant. Verùm in problematibus fortuitò oblatis solvendis minùs idonea reperitur, imò omninò inepta, præsertim cùm difficillimi problematis vel theorematis veritas examinari debet; nam ad hujusmodi propositiones demonstrandas longa est conclusionum series percurrenda, antequam ad primam, quæ cæterarum principium est, deveniatur. Et qua vi quæso, qua mentis sa-

gacitate principium illud tam longè à quæsito dissitum: audita sola quæstione indagabitur? rara est, & vix concessa hominibus ingenii bonitas, vel potiùs sublimitas, quæ rem tam occultam prima apprehensione detegat, nec utatur mediis conclusionum ad eam deducentibus. Profectò ut synthetice naturaliter adhibetur ad scientiarum structuram, atque ordinationem, ita consiteri oportet cùm novum quid, & insolitum proponitur tunc primùm Analyseos viam tentandam esse, quæ à natura videtur instituta ad hujusmodi quæstionum nodos dissolvendos; illa enim ab eo quod quæritur argumentationis suæ initium faciens, in plurimarum conclusionum serie, ad quæsiti probationem necessariâ progreditur primò ad illam à qua quæsitum immediatè pendet, tum transit ad proximè sequentem, sine qua infirma esset prima consequentia, ex hac ad superiorem, quæ infra positarum certitudinem auget, & eo deinceps progressu, donec ad primam devenerit, ex cujus cognitione, atque certitudine, per medium conclusionum hinc deductarum veritas in quæsitum, quasi per alveum dimanat, quæ & ipsum cognitum reddit. Ecquis ad illud principium à quæsito remotissimo ascendet intactis conclusionum interjacentium gradibus? Nemo profectò id efficiet, aut si efficiat secum tacitè Analysim exercebit, ut ad illud principium deveniat, ac deinceps opus syntheticum exequatur.

Hoc opinor egêre veteres illi artifices, & eximii Matheseos cultores, quorum egregia apud nos extant ingenii monumenta. Quamvis enim ea quæ nobis reliquerunt syntheticè tantùm conscripta sint, ipsos tamen in problematum solutionibus investigandis, quorum deductiones ordinis quadratici, ut vocant, limites non excedunt Analyticen communiter exercuisse, tum effectu manifestum, tum disertè ab ipsis significatum est. Unde scientias mathematicas, quas ab illis accepimus, artis hujus inventricis beneficio, quamplurimis accessionibus locupletatas fuisse pro certo existimandum est. Nam problemate processu analytico ad solutionis statum deducto, liberum, & facile eis fuit facto per Analyseos vestigia re-

greſſu demonſtrationem ſyntheticè conſtruere, conſtructamque ſuppreſſa Analyſi problemati attexere.

Mihi equidem olim apud varios authores, præcipuè verò apud eos qui mathematum gloria noſtro ſæculo floruerunt ſubtiliſſimas demonſtrationes, ex incogitatis, & inexpectatis, ſed divino quodam artificio conquiſitis principiis adeò affabrè concinnatas legenti admirantique ſtupor non ſemel incidit unde tanta exiſteret & ingenii, & imaginationis vis, quæ tam immenſam conſequentiarum molem ſuſtinere poſſet, facereque ut tot res, tam longè diſſitæ animo ſimul obverſentur, & quaſi ultrò in argumenti unius ſtructuram coeant atque conſidant. Sed poſtquam Analyſeos amore captus aliquam huic ſtudio exercitationem adjunxi, comperi hos inſignes viros in profundiſſimis difficultatum tenebris, & in una labyrintho, variis quæſtionum ambagibus perplexa ſapienter, ut inde evaderent, analytices filo cæca rexiſſe veſtigia; alias enim ſi ſola ſyntheſi uſi eſſent inextricabili errore plerumque impediti, & voti ſui minimè compotes irritos conatus adhibuiſſent.

Sed ſupponamus in quibuſdam viris, doctis illis quidem, & eruditis tantam ob ea quæ didicerunt peritiam, tantumque ſi velimus acumen reperiri, ut etiam in arduis propoſitionum difficultatibus optatum quandoque ipſorum animis offeratur principium, antequam hinc deductarum, & ad quæſiti probationem neceſſariarum concluſionum texturam fecerint; Id procul dubio non fiet ſine maxima animi contentione, quæ plerumque mentis aciem aut obtundit, aut obrumpit, &, quod magis eſt, illi plus temporis in hac perveſtigatione impendent quàm alter, qui doctrinæ adjumentis deſtitutus, & ſolius Analytices auxilio fretus, ejuſdem quæſtionis ſolutionem aggredietur. Nam ab eo quod in quæſtione eſt exordium ſumens per continuatas conſequentias, quaſi per gradus, facili negotio, & cum quadam non feſſi, ſed potiùs ad operis finem jucundè properantis animi voluptate ad idem principium delabetur. Unde tantùm abeſt ut hæc ars maximis ſemper extollenda laudibus ingeniorum

crux, atque tormentum, ſicut apud pleroſque malè audit, dici mereatur, quin potiùs inventa præcipuè excultaque eſt ut parcatur labori, & non fatigetur animus in operationibus ſuis, verùm inventorum argumentorumque ſubtilitate acuatur, & vires novas acquirat, ſicut poſteà meliùs, atque evidentiùs oſtendam.

Ex dictis, ut puto, ſatis clarè innoteſcit quid, & quantum neceſſaria ſit tam Analyſis, quàm ſyntheſis, quod utriuſque munus, & qua in re una differat ab alia. Nunc igitur tempus eſt poſtquam de duabus his methodis in genere locuti ſumus, ut ad mathematicam Analyſim in ſpecie, cujus potiſſimum cauſa hìc agitur, noſtra propiùs accedat oratio.

DE ANALYSI MATHEMATICA.

ANALYSIS latè ſumptâ vocabuli ſignificatione multas in ſpecies dividitur, habitâ ratione ſubjecti, circa quod ſuum exercet officium. Peculiaris hæc, de qua nunc agimus, in quantitatis, quæ mathematicarum diſciplinarum objectum eſt, conſideratione tota verſatur, & omnes probationes ſuas ad æquationem, tanquam ad artis magiſterium dirigit, atque deducit.

Hoc ut ritè explicetur ſciendum eſt primò ex duarum pluriumve quantitatum inter ſe comparatione naſci tum æqualitatem, tum inæqualitatem. 2° in omni quæſtione duo ut plurimùm reperiri, quæſitum videlicet quod ignoratur, & datum vel data quæ cognita ſunt, ac pro conceſſis aſſumuntur, à quibus rei quæſitæ veritas, atque comprehenſio dependet; quod ſi datum deſit, id arte ſupplendum eſt. Deinde illam quæſiti à datis dependentiam animadverti ignotum cum notis comparando, id eſt hoc in loco inſtitutâ quæſitæ quantitatis cum aliis datis, ſive cognitis comparatione, quam æqualitatis atque inæqualitatis genitricem mox dicebamus. Quoniam autem in omni genere quod ordinatum eſt, ſive quod unico tantùm modo ſe habet, tanquam fixum quid pro cæterorum, ſub eodem genere poſitorum, & in vertibilem inconſtantiam

inconstantiam transeuntium, regula supponi debet, quâ eorum irregularitates dignosci queant, & ad artem revocari, hinc fit ut ad æqualitatem omnia opera sua dirigat Analysta, & ad eam consequendam omni studio nitatur.

Ampliùs in memoriam revocandum est, quod primo capite primi libri docuimus, quinque solummodò dari posse circa quantitatem operandi formas, sive regulas, Additionem nimirum, Subductionem, Multiplicationem, Divisionem, & radicum Extractionem.

His omnibus ritè, ut par est, consideratis facilè intelligemus quod dum in evolvenda problematis difficultate notas quantitates cum incognita, vel incognitis comparando, utrasque per dictarum operationum regulas modis omnibus torquemus, atque mutamus, quo quæsiti veritas elucescat, sæpissimè accidit ut ignota quantitas, modò in se aliquoties multiplicetur, modò cognitis quantitatibus ipsam vel simplicem, vel aliquoties in se ductam multiplicantibus, aut dividentibus afficiatur, modò utrumque fiat, nimirum prout major vel minor occurrit problematis difficultas; & quod inde plures exoriuntur termini, alii aliis æquales, ipso quippe opere ad æqualitatem omnia dirigente, ex quibus aliqui constant ex quantitatibus omninò cognitis, aliqui ex solis quantitatibus incognitis, omni affectione carentibus; aliqui verò quasi mixti ex quantitatibus partim cognitis, partim incognitis, diversimodè inter se affectis. Nunc si summam ex his omnibus terminis compositam efficias, æquationem habebis; vel si eam paulò aliter considerare, atque aliis verbis enunciare velimus, dicemus æquationem esse quantitatis quæsitæ; sive simplicis, sive graduatæ, hoc est aliquoties in se ductæ, & affectionibus sæpenumerò implicatæ, cum quantitatibus datis, facta alterius ad alteram comparatione, distinctè ordinatam æqualitatem. Quia verò in ipso operis progressu nota cum ignotis confunduntur, ut adsit inter utrumque discrimen, quod necessarium esse statim confitebuntur omnes, ne quid sit id quod quæritur, aut quomodo affectum sit, posteà ignoretur, sibi ipsi præstat ars auxilium. Jubet enim symbolo

constanti, ac benè conspicuo quæsita à datis distinguere, incognitas nimirum quantitates vocalibus *a*, *e*, *i*, *v* &c. consonis verò *b*, *c*, *d* &c. datas significando. Et quamvis in hujus symboli electione libera sit hominum voluntas (nam quid impedit quominus his vel illis caracteribus atque signis, ad libitum effictis magnitudines, numeros, tempora, & cætera hujus generis denotare possis, modò semper recorderis pro qua peculiari quantitate signum quodlibet statuitur) verumtamen nihil aut commodiùs, aut ad juvandam memoriam aptiùs reperiri potest alphabeti literis. Illæ enim sunt notæ apud omnes gentes universales, & valdè simplices, quibus assuevimus ab ætatis initio, & quarum operâ calculus mirum in modum brevis, ac expeditus evadit. Prætereà in alphabeticis elementis tam notabilis est differentia inter vocales, atque consonas, ut si hæ quantitates cognitas denotent, illæ verò incognitas, quæsita à datis quàm citissimè distingues.

Hæc per literas computandi ratio logistice speciosa dicitur, & Arithmeticæ generis ejusdẽ participatione germana est; est namque Arithmetica logistice numerosa, hoc tantùm inter eas (quantum ad nominis rationem attinet) discriminis est, quod in arithmetica rerum mensurabilium quantitates per caracteres, seu figuras artis proprias numero, ut generali mensura exprimuntur, & computantur; in hac autem per notas litterales, elementa scilicet alphabetica, res ipsæ tanquam in specie (ex usu forensi recepto vocabulo) significantur, & omnimodè tractantur, unde speciosæ nomen obtinuit.

Illius usus multò accommodatior est quàm praxis numerosæ; nam in numerosa numeri à novo quem proferunt ita absorbentur, ut penitùs disparent, nec ullum sui vestigium relinquant. At in speciosa permanent species sine aliqua mutatione, specimen exhibentes totius operationis; unde non solùm in quæsiti notitiam ducunt, sed etiam theorema generale pro solutione consimilium quæstionum in aliis quantitatibus datis edocent.

Initur autem literalis hujus notationis calculus hoc modo. ascitis tribus notis prima videlicet + pro additio-

ne vel affirmatione, quæ plus; secunda verò — pro subductione, vel negatione, quæ minus significat; atque tertia $\sqrt{}$ pro extractione radicum; oportet tantùm notas illas quantitatibus inter se addendis, aut subducendis, aut ex quibus radicem extrahere volumus, præfigere, vel combinare literas ut indicetur illas inter se ductas, vel ducendas esse; vel demùm unam, vel plures super aliam, vel super alias ponere, interjectâ lineolâ in modum fractionis, ad significandum unam, vel plures per aliam, aut per alias divisas, vel dividendas esse. Sic propositis quibuscumque quantitatibus, homogeneis tamen, sive illæ sint numeri, sive magnitudines, sive soni, sive tempora, &c. quarum una significetur per a, altera per b scribo $a+b$ ad illas inter se addendas, aut $a-b$ ad subtrahendam b ex a, & ab ad multiplicandam unam per alteram, & aa, sive a^2 ad multiplicandam a in se, & aaa vel a^3 ad eandem adhuc semel multiplicandam per a, atque ita in infinitum: aut $\frac{b}{a}$ ad dividendam b per a, $\frac{ab}{c}$ ad dividendum productum ex a in b per c, & tandem $\sqrt{a}$ ad extrahendam radicem ex a, & $\sqrt{a+b}$ ad extrahendam radicem ex summa $a+b$, quæ bis posita, & semel in se ducta ipsam summam $a+b$ restituat, & $\sqrt[3]{a}$ ad extrahendam radicem ex quantitate a, quæ ter posita, & bis in se ducta ipsam a producat, & sic in infinitum, adjecto numero, radicis genus indicante.

Jam verò quia quantitates per multiplicationem, atque radicum extractionem ita mutantur, ut aliæ penitùs evadant, necessariumque sæpenumerò est singulas earum transformationes, quas certis notis expressimus, etiam verbis enunciare; ideò productum ex duabus diversis literis, duas diversas quantitates significantibus, verbi gratiâ ab, voco bimensum; productum verò ex tribus ut abc, vel aab trimensum, ex quatuor, ut $abcd$, vel $aacd$, &c. quadrimensum, & hoc in infinitum progressu, prout illa producta ex duabus, ex tribus, quatuor,

pluribusve dimensionibus constant. At quando eadem litera aliquoties in se ducitur, primum productum, ut *a a*, vel a^2 voco æquibimensum, secundum verò, ut *a a a*, vel a^3 æquitrimensum, tertium ut *a a a a* vel a^4 æquiquadrimensum, & eo deinceps ordine, prout eadem litera bis, ter, quater & pluries in se ducitur. Hæ productorum ordinatorum species satis apto vocabulo potestates etiam vocantur, ita ut quantitas, quæ radicis nomen habet, in primo potestatum gradu consistens, ideò prima potestas nuncupetur, secunda potestas cùm illa radix in se ducitur, tertia cùm genitum productum adhuc per radicem multiplicatur, & sic in infinitum. Sic etiam primam radicem, quæ bis posita, & semel in se multiplicata quantitatem, cujus radix est, restituit voco subæquibimensam, secundam verò quater posita, & bis in se multiplicata quantitatem cujus radix est reponit subæquitrimensam, & sic in infinitum, eodem ferè modo quo quantitas alterius submultiplex dicitur. His radicibus adhuc alia nomina dare possumus, licet enim eam, quæ subæquibimensa vocata est, radicem secundæ potestatis, subæquitrimensam verò, radicem tertiæ potestatis appellare, & sic de cęteris.

Harum appellationum rationem reddere difficile non est, nam hæc nomina rebus ita conveniunt, ut vel ipsa prolatio eorum significationem manifestet. De antiquis appellationibus nihil dicam: clarè enim apparet illas ad rem, quam significant, confestim animo repręsentandam minùs idoneas esse nostris, quibus in hoc opere utemur.

Nec est quod miremur Analyticen plures dimensiones quantitatibus assignare, quam eisdem ipsa natura tribuit; arti enim sufficit naturam quantum potest imitari, ejus vestigia sequendo, & ad ejus exemplar omnia cõponendo, promotis cæteroquin ejus limitibus, nam ubi natura desinit, ibi ars incipit. Propterea quamvis naturaliter non datur transitus à tertia dimensione ad quartam, nihilominus tamen artificialiter ad innumeras dimensiones progressio fit, cogente ad id tum operis necessitate, tum multiplicationis natura, dimensionum numerum sine fi-

ne augentis. Sed in hoc discrimen est, quod natura nihil genuit unicâ, vel duabus tantummodò dimensionibus contentum; solum corpus creavit trinè dimensum, cujus dimensiones ab eo sunt inseparabiles; ars verò à quantitate unicam dimensionem habente, vel quam sic considerat, incipiens multiplicationis, atque divisionis opera alias, atque alias dimensiones in infinitum ei superaddit, aut superadditas gradatim, vel ad libitum demit.

Et in arithmeticis optimè quidem intelligimus è plurium æqualium, vel inæqualium numerorum inter se ductu, sive illi numeri absoluti sint, sive radicales, aut surdi, & quæcumque tandem sit ipsorum multitudo, alios prodire numeros. Ut ex ductu $2 \times 2 \times 2 \times 2$ gignitur numerus 16, aut ex ductu $2 \times 3 \times 4 \times 5$, &c. efficitur numerus 120, vel tandem ex ductu $2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5}$ oritur surdus $6\sqrt{5}$ & sic de cæteris. Nec etiam dubitamus quin omnes numeri sint inter se homogenei, quamvis sæpenumerò specie differant, quales sunt numeri absoluti cum surdis, vel surdi unius speciei, cum surdis ad aliam speciem pertinentibus comparati; neque adhuc obscurè comprehendimus quod inde sequitur, 1° videlicet quoscumque numeros, propter communem ejusdem generis participationem, quibuscumque numeris addi, vel à quibuscumque numeris detrahi posse, cum hac nihilominus differentia, quod numeri inter se commensurabiles post additionis, vel subductionis opus unicum numerum per has operationes genitum relinquant, incommensurabiles verò inter se dum sibi invicem adduntur, aut à se invicem subducuntur summam efficiant ex pluribus nominibus compositam: Unde binomia, trinomia, & cætera polynomia ducunt originem. Deinde 2° per a^2, a^3 & vel per $b\,d$, $b\,c\,d$, &c, similesve compositionis notas nihil aliud quàm numeros designari, quorum unusquisque in tot æquales, inæqualesve dimensiones quot ei assignare voluerimus, resolubilis est. Ut si propositum quemvis numerum 64 in duas æquales dimensiones resolvere velimus, ipsum designabimus per $a\,a$, & fiet $a \sqcap 8$ vel si

in tres, ipsum significabimus per a^3, & erit $a \,\Pi\, 4$; vel si in quatuor, ipsum notabimus per a^4, & fiet $a \,\Pi\, 2\sqrt{2}$. Nam 8×8 vel $4 \times 4 \times 4$ vel $2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \,\Pi\, 64$. Idem de surdis ferto judicium, ut si proponatur surdus numerus $\sqrt{3}$, qui in duas aequales dimensiones resolvi debeat ipsum nominabimus aa, & per radicis subaequibimensae extractionem invenietur $a \,\Pi\, \sqrt[4]{3}$; vel si in tres ipsum eumdem vocabimus aaa, & per radicis subaequitrimensae extractionem invenietur $a \,\Pi\, \sqrt[6]{3}$, & eo in infinitum ordine, nam $\sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{3}$ vel $\sqrt[6]{3} \times \sqrt[6]{3} \times \sqrt[6]{3} \,\Pi\, \sqrt{3}$. Pariter si eundem propositum numerum 64 in duas inaequales dimensiones resolvere cupiamus, ipsum appellabimus bd, aut bcd si in tres, &c. & tunc una quaelibet ex his literis b, c, d infinitos admittet valores, pro infinita duorum vel trium factorum, ex quibus producta bd, vel bcd componi possunt varietate; haec enim omnia numerorum natura sustinet.

At in geometricis multò aliter se res habet, nam simplex, sive unius dimensionis magnitudo magnitudini ex duabus dimensionibus compositae heterogenea est, atque haec novae dimensionis accessione genus mutat. Sic quantitates quas bimensas, trimensas, atque quadrimensas vocavimus, & caeterae plurimensae omnes diversorum graduum heterogeneae sunt. Unde sequitur inter solas magnitudines ejusdem gradus, sive in quibus aequalis dimensionum numerus reperitur, vel uno verbo inter potestates aeque-altas, ut pote inter se homogeneas, comparationem institui posse, illas inter se addendo, vel unas ab aliis subducendo.

Praeterea simplicem, sive unimensam magnitudinem, quae linea, vel longitudo, vel latitudo, bimensam, vel ęquibimensam, quę superficies aut rectangulum, aut quadratum, trimensam, vel aequitrimensam, quae *solidum*, sive corpus, sive parallebipedum, sive cubus vocatur facilè nobis animo repręsentamus; haec enim omnia

in corpore naturali distinguere solemus; reliqua verò multimensa, quibus ars quatuor, quinque, pluresve dimensiones tribuit, & quæ naturæ impossibilia sunt, difficiliùs sub imaginationem cadunt.

Quamobrem ut hoc mysterium tandem reveletur observabimus concepta artis Analyticæ theoremata, vel problemata nullo quantitatis genere coërceri, sed ita latè per omnia vagari ut indifferenter & ad numeros, & ad magnitudines aptari possint, dummodò eorum, quæ factu impossibilia sunt, effectionem ars non suscipiat; hanc enim legem ipsi necessitas imposuit, ut licet statutos à natura fines longè præteriret, nihil tamen contra naturam moliretur. Hac de causa priusquam alicujus Analyticæ propositionis, ad solutionis statum deductę, veritas in magnitudine, vel in numero examinetur, consideranda est utriusque quantitatis speciei indoles, quâ animadversâ videndum utrum id quod proponitur ambarum specierum viribus accommodatum sit, an verò alicujus ex illis potentiam superet: multa enim in una fieri possunt, quæ in altera fieri repugnat. Hoc in numero reponenda sunt omnia problemata, quæ compositas supra trinam dimensionem quantitates reipsa exhiberi volunt, verbi gratiâ, si jussum foret duo æquiquadrimensa reperire, & exhibere, quorum summa datæ quantitati æqualis sit, problema illud merè numericum est, frustraque ejus solutionem à geometria expectes, quæ præter lineam, superficiem, & solidum sive corpus, reale nihil agnoscit; cæteræ magnitudines, quæ pluribus quàm tribus dimensionibus abundant, & in natura non reperiuntur, ideales sunt, quarum constructionem dare non est artis munus, ne quis error hîc committatur; verùm cogente arduarum quæstionum difficultate illas solummodò producit, iisque multo cum profectu utitur in toto operis progressu, ad inveniendam quæsiti cum datis relationem, quæ nisi per iteratas muliplicationes, & compositorum productiones sæpè agnosci nequiret. Quando autem id quod quæritur in æquationis ordinatæ involucris adhuc delitescens apparuit, tunc radicem ex inventa æquatione extrahendo

compositas magnitudines in suas dimensiones ita resolvit, ut omnes ad unicam dimensionem reducat, solis rectis lineis pro operationibus fructu remanentibus. Atque is est omnium operum analyticorum finis, ex quo videre est quàm necessarium sit in analysi omnia geometriæ problemata ad hujusmodi terminos reducere, ut deinde ad illorum constructionem necessarium tantùm sit rectarum quarumdam linearum longitudinem cognoscere, quod facillimum esse judicabimus, si consideremus ex lineę in transversum ductu superficiem, corpus verò, sive solidum ex superficie mota generari.

Verùm in iis non conquiescit intellectus, vult enim magnitudinum ad plures quàm tres dimensiones ascendentium ideam sibi formare, ad instar cæterarum magnitudinum infra positarum, & jure merito, nam artificiales illę magnitudines, supra naturalem metam evectæ semper aliquid materiale in conceptu suo involvunt, sed hoc quid sit ignoratur. Et ferè hîc dicere sufficiet, ea quę in geometricis arte fiunt, & componuntur, magnitudines, esse eandem inter se proportionem habentes quam recta linea, ad aliam rectam lineam; nam facilè est efficere ut duarum magnitudinum, cujuscumque generis illæ sint, modò in una totidem dimensiones existant quàm in altera, proportio in rectis lineis conspiciatur. Sunto enim $abcd$, $efgh$. Inter a & b reperiatur media proportionalis, quæ sit m; ergo mm æquatur ab, & consequenter $mmcd \; \Pi \; abcd$. Posteà ponatur $m . c :: d . k$; ergo $mk \; \Pi \; cd$, & consequenter $mmmk \; \Pi \; abcd$. Deinde fiat $m . e :: f . l$. Ergo $ml \; \Pi \; ef$; & consequenter $mlgh \; \Pi \; efgh$. Rursus ponatur $m . l :: g . p$. ergo $mp \; \Pi \; lg$, & consequenter $mmph \; \Pi \; mlgh$. Ultimo facto $m . p :: h . q$. habetur $mq \; \Pi \; ph$, & consequenter $mmmq \; \Pi \; efgh$, & tandem $mmmk . mmmq :: k . q$ ex proportionum regulis. Vel si sumpsissem mediam proportionalẽ inter e, & f quæ sit n, iisdem ut priùs constitutis ortũ fuisset $nnnr$, & $nnns$, & rectę r & s: diversæ quidem forent à rectis k & q, sed eadem ratio esset inter primas, quàm inter ultimas, vel tandem si lineam posuissem ad libitum sumptam.

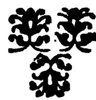
ptam pro primo ſequentis analogiſmi termino, nempe $z.a :: b.x$ repetitâ antecedenti operatione factum fuiſſet $zzz\lambda.$ & $zzz\theta$, & rectæ per λ & θ ſignificatæ ſola ſubrogatione alterius literæ, ipſius z officio fungentis mutarentur, ſed eam rationem ſervarent quam quæ inter k & q, vel inter r, & $ſ$, reperitur, atque hoc omne juxta naturam proportionum, quarum unaquæque terminis innumeris ſimiliter ſe ſe ad invicem habentibus exprimi poteſt.

Et hæc quidem relationis inter artificialia magnitudinum producta exiſtentis cognitio aliquid lucis affert, ſed correlata ſunt adhuc ignota, nec ſatis videt intellectus quidnam apprehendere debeat ut illa ſibi objicere poſſit. Ut igitur hac in parte nobis ſatisfaciamus recordari oportet præcipuum numerorum munus eſſe ut cujuſlibet quantitatis molem, atque menſuram, præcipuè verò proportiones, quæ inter quanta reperiuntur, explicent; eſt enim proportio, ut alibi diximus, determinata quædam æqualitatis vel inæqualitatis ſpecies, quod numericum eſſe nemo videt. Et benè quidem æqualitatem & inæqualitatem latè ſumptam in rectis lineis abſque ulla numerorum conſideratione comprehendimus, & per rectas lineas exprimimus; verùm cùm ad determinationem proportionum effectricem perventum eſt, tunc procul dubio vocandi ſunt in auxilium numeri, ſine quibus illæ perfectè intelligi nequeunt. Quomodo enim duarum rectarum tibi ignotarum rationem invenire poteris niſi per ambarum menſurationem? & quomodo illas menſurabis abſque numeris, qui menſurationis omnis inſtrumenta ſunt. Enimverò omnia proportionum genera denominationes ſuas à numeris abſolutis, aut ſurdis, prout comparatæ quantitates inter ſe commenſurabiles aut incommenſurabiles exiſtunt, ſortiuntur; atque in univerſa geometriæ conſtitutione, licet diverſa objecta magnitudinis genus participantia reſpiciat, nonniſi relationes, ſive proportiones quædam quæ in eis ſunt, conſiderantur. Unde fortaſſe non malè fecerimus ſi non ſolùm pro magnitudini-

bus, quæ per nimiam compositionem suam naturæ vires superant, verumetiam pro quibuscumque aliis compositis earum valores per numeros absolutos, vel surdos significabiles sunt, aliquas non abstractorum, sed concretorum numerorum species mente comprehendamus: nam postea facilè intelligemus qua ratione numeralia hæc producta generantur, & quomodò per divisionem atque radicum extractionem in tot dimensiones, quot eorum denominatio indicat, resolubilia sunt. Sic naturæ defectus, vel potiùs impotentia arte corrigetur, & phantasia notis imaginum speciebus adjuvabitur.

Et sanè multò tolerabiliùs mihi videtur magnitudines supra trinam dimensionem ascendentes arithmeticè per explicatam methodum concipere, quàm easdem geometrico more imaginari. Illæ enim inanes sunt continuæ quantitatis species, quarum effectio tum factu impossibilis, tum mente incomprehensibilis est. Solùm hac in re cavendum est ne sicut numeros omnes naturâ suâ ejusdem generis esse, eosque propterea promiscuè inter se addi, vel unum ab alio detrahi posse pro certo tenemus, ita etiam propter conceptiones nostras numeris nimium alligatas credere velimus, magnitudines omnes inter se homogeneas esse, quas cujuscumque alterius additione augere, vel ablatione minuere fas sit, quod minime licet: nam, ut diximus, magnitudo duabus dimensionibus contenta magnitudini tres dimensiones habenti heterogenea est, sicut in universum magnitudines omnes, quæ non æque multis dimensionibus constant, quas in unam summam coalescere posse repugnat heterogeneorum lex.

Sic jactis logistices universalis fundamentis consequens est ut ejus regulas, atque leges breviter exponam.



REGULÆ LOGISTICES SPECIOSÆ, ET EARUM ORIGINES.

ANTE omnia brevitatis ergo pro æqualitatis nota usurpabimus hanc Π; pro majoritatis signo sequentem F, & contrariam nimirum Ꞁ pro minoritate, vel pro minori inæqualitate denotanda. Sic scribo *a* Π *b* ad significandum quantitatem *a* æqualem esse quantitati *b*, & *a* F *b* ut indicetur *a* majorem esse *b*, vel *a* Ꞁ quando *a* minor est ipsâ *b*. Hoc supposito ad regulas veniamus, & pro primæ videlicet Additionis fundamento præmittamus,

AXIOMA.

Quantitatum æqualium contrariis signis affectarum summa nihil est.

Nam quantum additionis signum affirmat, sive ponit, tantumdem subductionis signum negat, sive tollit. Sic æquali ab æquali subducto nihil remanet,

Ut + *a* & — *a* Π *o*, atque + 2 & — 2 Π *o*. Hinc

COROLLARIUM.

Quantitatum inæqualium contrariis signis affectarum summa est ipsarum residuum majoris quantitatis signo affectum.

OSTENSIO.

Proponantur duæ inæquales quantitates contrariis signis affectæ, nimirum + *a* F, & — *b* Ꞁ, & sit earum differentia *x*, itaut + *a* Π + *b* + *x*, unde propositæ quantitates erunt + *b* + *x* & — *b*. Atqui per axioma præcedens fit + *b* & — *b* Π *o*, ergo + *a* & — *b* Π + *x*.

Vel sint — *a* F, + *b* Ꞁ: & sit ut priùs earum differentia *x*. Ergo — *a* Π — *b* — *x*, & propositæ quantitates erunt — *b* — *x* & + *b*. Atqui per axioma præcedens — *b* & + *b* Π *o*. Ergo — *a* & + *b* Π — *x*, ut volebat corollarium.

Sic in numeris -2 & $(+3\ \Pi)+2+1\ \Pi+1$; necnon $+2\ (-3\Pi)-2-1\ \Pi-1$. Ex his additionis regula sic colligitur.

REGULA ADDITIONIS.

Si quantitates iisdem literis notatæ, eodem signo afficiantur, numerentur illæ, & earum summæ commune signum præfigatur. Si verò contraria habeant signa, & æquales sint ponatur o pro earum summa. Quod, si contrariis notis affectæ, inæquales existant, earum aggregatum erit ipsarum residuum, majoris signo affectum.

Quantum attinet ad quantitates diversis literis notatas, oportet tantùm eas suis signis connectere.

REGULA SUBDUCTIONIS.

Subductio Additione perficitur, mutatis priùs omnibus signis quantitatis subducendæ.

DEMONSTRATIO MUTATIONIS SIGNORUM

1°, Quando affirmata quantitas ab altera quantitate subduci debet, perspicuum est affirmatum subducendæ quantitatis signum, in negatum, quod nempe subductionem factam vel faciendam denotat, mutari debere.

Ut si $+b$ subduci debeat ex a, reliquum erit $a-b$.

2°, Quando binomia quantitas, cujus unum nomen est affirmatum, alterum verò negatum, verbi gratiâ $+c-b$ ab alia quacumque quantitate a subducenda est, manifestè cernitur non peti ut tota quantitas c à proposita quantitate a dematur, sed solùm ut ejus aliqua pars, videlicet $+c-b$, sive differentia inter c & b subducatur, quæ differentia si vocetur d, erit $c\ \Pi+d+b$. At subducendo quantitatem c integram, unà cum differentia d etiam subtrahitur b, quæ subduci non debet; quare additione quantitatis b deffectus ille compensandus est.

Vel breviùs quia d subduci debet ex a reliquum erit $a-d$, sive quod idem est $a\ (-c+b\Pi)-d-b+b$; nam $-b+b\ \Pi\ o$.

3°, Si negata quantitas $- b$ ſubducenda ſit ex a, addita utrimque communi quantitate $+ c$, eadem differentia remanebit inter auctas quantitates $a + c$, & $+ c - b$ quàm inter 1° poſitas a & b per æqualitatis leges.

Atqui ex probatis ſubducendo $+ c - b$ ex $a + c$ remanet $a + c - c + b$, id eſt $a + b$. Ergo ſubducendo $- b$ ex a, relinquitur $a + b$, quod erat oſtendendum.

REGULA MULTIPLICATIONIS, ATQUE DIVISIONIS.

Si ſigna ſint ſimilia producta, vel orta quantitas erit affirmata, ſin diverſa, negata. Id eſt $+$ in $+$, vel $-$ in $-$ facit $+$. At $-$ in $+$, vel $+$ in $-$ efficit $-$.

DEMONSTRATIO REGULÆ.

Dum affirmata quantitas in affirmatam ducitur, affirmatur productam quantitatem affirmari. Dum verò negata ducitur in negatam, negatur productam quantitatem negari.

Unde quemadmodum affirmatio affirmationis, & negatio negationis affirmant; Ita $+$ per $+$, & $-$ per $-$ producit $+$.

Quando verò affirmata quantitas in negatam ducitur, vel negata in affirmatam, affirmo productam quantitatem negari, vel nego affirmari. Ergo ſicut affirmatio negationis, vel negatio affirmationis negant, ita $+$ per $-$, vel $-$ per $+$ producit $-$, quod erat oſtendendum.

MONITUM.

Alias ejuſdem rei demonſtrationes videre poteris apud Authores, & præſertim apud Schootenium in eo libello, quem de Matheſeos univerſalis principiis, ſive potiùs de generalis Logiſtices Regulis accuratè conſcripſit, ubi fusè tradita, & exemplis illuſtrata ſunt, quæ nos hîc leviter tantùm attigimus, ne in re vulgari oleum & operam, quod aiunt, perderemus.

CAPUT II.

De solutione Æquationum duas dimensiones habentium.

INVESTIGATIO I.

Per resolutionem æqualitatis in proportionem.

SCIENDUM 1° est omnes duarum dimensionum æquationes ad sequentes formulas reduci.

$$+ aa + ca - dd \;\Pi\; o.$$
$$+ aa - ca - dd \;\Pi\; o.$$
$$+ aa - ca + dd \;\Pi\; o.$$
$$+ aa + ca + dd \;\Pi\; o.$$

Esto 1° $+ aa + ca - dd \;\Pi\; o$, sive per metathesim $+ dd \;\Pi\; + aa + ca$, & datam æquationem in proportionem resolvendo fit $+ a.\; + d.\; + c + a \div\!\div$. Quare hîc est series trium continuè proportionalium; & ex datis mediâ d, & extremarum differentiâ c, quæruntur extremæ a ⊓, & $c + a$.

Esto 2° $+ aa - ca - dd \;\Pi\; o$, sive per metathesim $+ dd \;\Pi\; + aa - ca$, & datam æquationem in proportionem resolvendo fit $+ a.\; + d.\; + a - c \div\!\div$. Quare hîc ut priùs est series trium continuè proportionalium, & ex datis mediâ d, & extremarum differentiâ c, quæruntur extremæ a F, & $+ a - c$.

Esto 3° $+ aa - ca + dd \;\Pi\; o$, sive per metathesim $+ dd \;\Pi\; - aa + ca$, & datam æquationem in proportionem resolvendo fit $+ a.\; + d.\; - a + c \div\!\div$. Quare hîc etiam est series trium continuè proportionalium, & ex datis mediâ d, & extremarum summâ c, quæruntur extremæ a F vel ⊓, & $+ c - a$.

Esto 4° $+ aa + ca + dd \;\Pi\; o$, sive per metathesim $+ dd \;\Pi\; - aa - ca$, & datam æquationem in proportionem resolvendo fit $+ a.\; + d.\; - a - c \div\!\div$.

Quare hîc adhuc est series trium continuè proportionalium, & ex datis mediâ d, & extremarum summâ c, quæruntur extremæ a F vel ꟼ, & $-c-a$. Itaque

PROBLEMA I^um^ VIETÆ.

In serie trium continuè proportionalium, datis mediâ, sive rectangulo sub extremis, & extremarum summâ, vel differentiâ, ipsas extremas invenire.

Manifestum est ex præmissis propositum problema difficultates omnes involvere, quæ in æquationum duas dimensiones habentium solutionibus occurrere possunt.

ALITER.

Esto 1° $+aa+ca-cf$ ⊓ o, sive per metathesim $+aa$ ⊓ $-ca+cf$, quâ æquatione in proportionem resoluta fit $+c. +a. -a+f.$ ∺. Quare hîc est series trium continuè proportionalium; & ex datis primâ c F vel ꟼ, & summa mediæ & alterius extremæ, nimirum f, quæruntur media a, & altera extrema $-a+f$.

Esto 2° $+aa-ca-cf$ ⊓ o, sive per metathesim $+aa$ ⊓ $+ca+cf$, quâ æqualitate in proportionem resolutâ fit $+c. +a. +a+f$ ∺. Quare hîc est series trium continuè proportionalium; & ex datis 1ª c ꟼ, & f differentiâ mediæ & alterius extremæ, quæruntur media a, & altera extrema $+a+f$.

Esto 3° $+aa-ca+cf$ ⊓ o, sive per metathesim $+aa$ ⊓ $+ca-cf$, quâ æqualitate in proportionem resolutâ fit $+c. +a. +a-f$ ∺. Quare hîc est series trium continuè proportionalium; & ex datis 1ª c F, & differentiâ mediæ, & alterius extremæ, nimirum f quæruntur media a, & altera extrema $+a-f$.

Esto 4° $+aa+ca+cf$ ⊓ o, sive per metathesim $+aa$ ⊓ $-ca-f$, quâ æquatione in proportionem resolutâ fit $+c. +a. -a-f$ ∺. Quare hîc est series trium continuè proportionalium; & ex datis 1ª c F vel ꟼ, & summa mediæ, & alterius extremæ, nimirum f, quæruntur media a, & altera extrema $-a-f$. Hinc

PROBLEMA II^{um}. VIETÆ.

In serie trium continuè proportionalium datis primâ, cum summa vel differentia mediæ, & alterius extremæ, invenire mediam, & alteram extremam.

Manifestum etiam est propositum problema sicut præcedens difficultates omnes involvere, quæ in bimensarum æquationum solutionibus occurrere possunt. Quod adhuc clariùs ex talium æquationum genesi apparebit.

GENESIS PRÆCEDENTIUM ÆQUATIONUM.

Esto series trium continuè proportionalium, verbi gratiâ:

1ª, media, 3ª.

c. a. $\frac{aa}{c}$.

Fiat 1°, $+a+\frac{aa}{c}\,\Pi+f$. Ergo $+aa+ca-cf\,\Pi\,o$.

Fiat 2°, $-a+\frac{aa}{c}\,\Pi+f$. Ergo $+aa-ca-cf\,\Pi\,o$.

Fiat 3°, $+a-\frac{aa}{c}\,\Pi+f$. Ergo $+aa-ca+cf\,\Pi\,o$.

Fiat 4°, $+a+\frac{aa}{c}\,\Pi-f$. Ergo $+aa+ca+cf\,\Pi\,o$.

INVESTIGATIO II.

Per convenientem additionem supplementi, quo æquationis pars, potestate radicis, ejusque gradu implicita deficit à canonica generatione quadratorum ex binomiis.

Esto 1° $+aa+ca-dd\,\Pi\,o$, sive per metathesim $+dd\,\Pi\,+aa+ca$. Utrique æqualitatis parti addatur $+\frac{1}{4}cc$, hoc est supplementum quo æquationis pars $+aa+ca$ deficit à canonica generatione quadratorum

dratorum ex binomiis; quæ quidem genesis docet binomii cujusvis æquibimensum æquari duobus nominum æquibimensis, plus duplice bimenso sub nominibus. Nam si ca, sumatur pro duplice bimenso sub nominibus, a, & c, binomii quæsiti nomina erunt $+a$ & $+\frac{1}{2}c$, quæ bis in se ducta producunt $+ca$. Supplementum igitur addendum est $\frac{1}{4}cc$, videlicet æquibimensum nominis $\frac{1}{2}c$, cùm jam habeatur alterius nominis a æquibimensum $+aa$. Quare per dicti supplementi additionem fiet $+\frac{1}{4}cc+dd \sqcap +aa+ca+\frac{1}{4}cc$, & harum æqualium summarum radices subæquibimensas sumendo habetur $+a+\frac{1}{2}c \sqcap + \sqrt{\frac{1}{4}cc+dd}$, vel $-a-\frac{1}{2}c \sqcap + \sqrt{\frac{1}{4}cc+dd}$ (quoniam ex ductu binomii $+a+\frac{1}{2}c$ in seipsum, vel binomii $-a-\frac{1}{2}c$ in seipsum semper oritur eadem quantitas $+aa+ca+\frac{1}{4}cc$), ergo per metathesim fit $+a \sqcap -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{\frac{1}{4}cc+dd}$.

Esto 2° $+aa-ca-dd \sqcap o$ sive per metathesim $+dd \sqcap +aa-ca$, & utrimque addito $+\frac{1}{4}cc$ habetur $+\frac{1}{4}cc+dd \sqcap +aa-ca+\frac{1}{4}cc$, & harum æqualium summarum radices subæquibimensas sumendo fit $+a-\frac{1}{2}c \sqcap \sqrt{\frac{1}{4}cc+dd}$, vel $-a+\frac{1}{2}c \sqcap \sqrt{\frac{1}{4}cc+dd}$ (quoniam ut priùs sive ducas binomium $+a-\frac{1}{2}c$ in se, sive binomium $-a+\frac{1}{2}c$ etiam

in se, semper producetur $+aa-ca+\frac{1}{4}cc$), ergo $+a\,\Pi+\frac{1}{2}c\pm\sqrt{\frac{1}{4}cc+dd}$.

Esto 3° $+aa-ca+dd\,\Pi\,o$, vel per metathesim $+aa-ca\,\Pi-dd$, & utrimque addito $\frac{1}{4}cc$, fit $+aa-ca+\frac{1}{4}cc\,\Pi+\frac{1}{4}cc-dd$, & harum æqualium summarum radices subæquibimensas sumendo habetur $+a-\frac{1}{2}c\,\Pi\sqrt{\frac{1}{4}cc-dd}$ vel $-a+\frac{1}{2}c\,\Pi\sqrt{\frac{1}{2}cc-dd}$, ob rationem superiùs allatam. Ergo $+a\,\Pi+\frac{1}{2}c\pm\sqrt{\frac{1}{2}cc-dd}$.

Esto 4°. $+aa+ca+dd\,\Pi\,o$, vel per metathesim $-dd\,\Pi+aa+ca$, & utrimque addito $+\frac{1}{4}cc$ fit $+\frac{1}{4}cc-dd\,\Pi+aa+ca+\frac{1}{4}cc$, & harum æqualium summarum radices subæquibimensas sumendo habetur $+a+\frac{1}{2}c\,\Pi\sqrt{\frac{1}{4}cc-dd}$, vel $-a-\frac{1}{2}c\,\Pi\sqrt{\frac{1}{4}cc-dd}$ ob rationem supra allatam. Ergo $+a\,\Pi-\frac{1}{2}c\pm\sqrt{\frac{1}{4}cc-dd}$.

OBSERVATIO.

Per 1am investigationem innotescit quibus operationibus indigeat bimensarum æquationum solutio, sed opus ipsum exequitur secunda per solam radicis extractionem: quæ quidem operatio simul ostendit quot radicibus constet unaquælibet æquatio. Nam quæ in 1am, & 2am formulam incidunt duabus constant radicibus unâ negatâ, alterâ affirmatâ, & nulli determinationi sunt obnoxiæ, Quæ vero ad 3am, & 4am formulam pertinent duabus pa-

riter constant radicibus, sed affirmatis, & hanc limitationem patiuntur ut requiratur $+\frac{1}{4}cc \text{ F } + dd$; alias enim harum æquationum radices evadent surdo-negatæ, quas easdem imaginarias Cartesius appellat.

Verùm ut quàm facillimè inveniantur bimensarum æquationum radices, ordinentur earum termini hoc qui sequitur modo:

$$+aa \sqcap -ca+dd.$$
$$+aa \sqcap +ca+dd.$$
$$+aa \sqcap +ca-dd.$$
$$+aa \sqcap -ca-dd.$$

Et fiet $+a \sqcap . \frac{1}{2}c \pm \sqrt{+\frac{1}{4}cc\ .\ dd}$. pro Regula generali solvendarum æquationum duas dimensiones habentium. Quantitates verò $\frac{1}{2}c$ & dd, quæ hîc nullo signo notantur, iisdem signis afficiendæ sunt, quibus in proposita æquatione afficiebantur.

Vel ordinentur earum termini, sicut ab initio factum est, nimirum,

$$+aa+ca-dd \sqcap o.$$
$$+aa-ca-dd \sqcap o.$$
$$+aa-ca+dd \sqcap o.$$
$$+aa+ca+dd \sqcap o.$$

Et fiet $+a \sqcap -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{+\frac{1}{4}cc-dd}$ etiam pro Regula generali solvendarum æquationum duas dimensiones habentium. Vel fortasse meliùs si pro c scribatur p, & q pro dd. Sic erit generalis Regula $+a \sqcap -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp-q}$ quæ ad omnes casus se extendit, ubi p denotat quantitatem 2di termini affectam suis signis + vel —, multiplicandam in $-\frac{1}{2}$: q verò quantitatem tertii termini, etiam suis signis + vel — affectam, ac

per signum — pariter multiplicandam.

Hæc autem generalis Regula cum similibus aliis, tam pro solutione, quàm transformatione æquationum in quolibet gradu existentium, colligitur supponendo omnes æquationis terminos esse affirmatos, sive notatos signo +, ut accidit in æquationibus 4æ formulæ, quando videlicet æquatio ita disponitur ut omnes ejus termini ab una parte stent, sive nihilo sint æquales. Verbi gratiâ, ponatur $+ aa + pa + q \sqcap o$, per supra traditam doctrinam habetur pro hujus æquationis radice $+ a \sqcap - \frac{1}{2}p \pm \sqrt{+\frac{1}{4}pp - q}$.

EXEMPLUM IN NUMERIS.

Detur quælibet æquatio numerica $+ aa - 2a - 5 \sqcap o$ hic $p \sqcap - 2$ & $q \sqcap - 5$. Quare juxta Canonis leges oritur $+ a \sqcap + 1 \pm \sqrt{+1 + 5}$, & sic de aliis.

Secundum hanc valde ingeniosam methodum, quæ à D. Huddenio insigni Mathematico inventa est, ut omnes æquationum casus, qui ex signorum diversitate oriuntur, ad unum refferri, & sic multi labores rescindi queant, cæteras Regulas tradam, sive pro æquationum quarumlibet solutione, sive pro earumdem transformatione, aut depressione, ne sæpiùs idem repetere cogar.

JAM SEQUITUR GEOMETRICA BIMENSARUM ÆQUATIONUM SOLUTIO E' PRÆDICTO RADICUM, AB HIS ÆQUATIONIBUS EXTRAHENDARUM CANONE, TANQUAM E FONTE DERIVATA.

REGULA I[a].

Pro solutione Geometrica bimensarum æquationum 1[e] & 2[e] formulæ.

Esto 1° $+aa \,\Pi\, +pa + q$ vel $+aa \,\Pi\, -pa + q$. Per Canonis leges fit $+a \,\Pi\, \pm \frac{1}{2}p \pm \sqrt{1}\overline{\frac{1}{4}pp + q}|$ Æquibisecetur $bp \,\Pi\, p$ in puncto m; tum puncto p, ipsi bp erigatur $\perp^{lum}$ $p\sqrt{q}| \,\Pi\, \sqrt{q}|$. Deinde centro m, intervallo $m\sqrt{q}|$ describatur circuli arcus $\sqrt{q}|a$ secans bp indefinitè productam in puncto a. Et erit $ab \,\Pi\, a$ quando in æquatione habetur $+pa$; vel erit $ap \,\Pi\, a$ quando in æquatione est $-pa$.

Nam $+ba \,\Pi\, (+bm) + \frac{1}{2}p$ $(+ma \,\Pi\, +m\sqrt{q}| \,\Pi)$ $+\sqrt{1}\overline{\frac{1}{4}pp + q}|$ & $+ap \,\Pi\,$ $(-mp \,\Pi)$ $-\frac{1}{2}p$ $(+ma \,\Pi)$ $+\sqrt{1}\overline{\frac{1}{4}pp + q}|$.

REGULA II[a].

Pro solutione Geometrica bimensarum æquationum, quæ in 3[am] & 4[am] formulam incidunt.

Esto 2° $+aa \,\Pi\, +pa - q$, vel $+aa \,\Pi\, -pa - q$. Æquibisecetur ut priùs recta $bp \,\Pi\, p$ in puncto m, à quo ad ipsam bp erigatur $\perp^{lum}$ $m\sqrt{q}| \,\Pi\, \sqrt{q}|$. Tum centro $\overline{q}|$ intervallo $\overline{q}|a \,\Pi\, bm$, vel mp describa-

tur circuli arcus fg, ſecans rectam bp in puncto a, (nam ſi arcus fg rectam bp non ſecaret propoſitæ æquationis radices eſſent ſurdo-negatæ) & erit ba vel $ap \,\Pi\, a$.

$$\text{Nam } + ba \,\Pi\, (+ bm \,\Pi\,) + \frac{1}{2} p \; (+ ma \,\Pi\,) + \sqrt{\frac{1}{4} pp - q} \,\Big| . \text{ Et } + ap \,\Pi\, (+ mp \,\Pi\,) + \frac{1}{2} p \, (- ma \,\Pi\,) - \sqrt{\frac{1}{4} pp - q} \,\Big| .$$

OBSERVATIO.

Tradita methodus extrahendarum radicum ab æquatione everſa $+ aa - pa + q \,\Pi\, o$ abſque ullius ad bp parallelæ ope perficitur, quam tamen parallelam omnes alii, ut idem præſtent ducere coguntur.

Everſam cum Vieta æquationem intelligo quando ſtantibus ab una æquationis parte omnibus terminis (qui propterea nihilo ſunt æquales) extremi termini eodem ſigno afficiuntur.

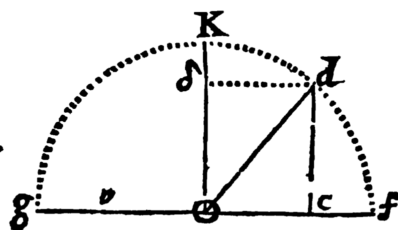
SCHOLIUM Ium.

Poteſt præcedens æquatio $+ aa - pa + q \,\Pi\, o$ ſolvi abſque ductu ullius ⊥^{li}, nempe æquibiſecando bm in puncto o. Nam ſi ab eo tanquam centro, & radio bo, vel mo deſcribatur circulus, in quo aptetur recta $b\sqrt{q}\,| \,\Pi\, \sqrt{q}\,|$ (quæ ſemper eſt minor diametro bm, niſi propoſita æquatio radices habeat ſurdo-negatas, ut jam notavimus) & fiat $ma \,\Pi\, m\sqrt{q}\,|$ erunt ut priùs ba, & ap radices propoſitæ æquationis.

SCHOLIUM II.

Primæ inveſtigationis doctrinâ adjuti poteramus ſtatim prædictarum æquationum radices exhibere. Quoniam enim per inventum ex illa indagatione problema mone-

mur omnem bimensas æquationes solvendi difficultatem in eo consistere ut ex datis mediâ, & extremarum summâ, vel differentiâ in serie trium continuè proportionalium inveniantur extremæ.



Ad hunc finem petatur è Geometricis canonica trium continuè proportionalium generatio, descripto nempe quolibet semicirculo *o g K d f*, & super ejus diametrum *g f* erecto ⊥^lo^ *d c*, circumferentiam secante in puncto *d*.

Jam quia in serie trium continuè proportionalium *g c. c d. c f*, datur extremarum summa *g f*, & mediâ *c d*, sed non punctum *c*, quod solum ignoratur. Ut illud inveniamus, super data *g f*, tanquam diametro describatur semicirculus *o g K d f*, a cujus centro *o* excitetur ⊥^lum^ *o K*, circumferentiam attingens in puncto *K*. Tum facto *o δ* Π *c d*, ductâque *δ d* = *g f* circumferentiam secante in puncto *d*. Si à puncto *d*, sic invento, in ipsam *g f* demittatur ⊥^lum^ *d c*, obtinebitur quæsitum punctum *c*.

Si vero datur extremarum differentia *b c*, cum media *c d*; jungantur illæ ad angulum rectum, æquibisectâque *b c* in *o*, ducatur *o d*, quæ diameter erit circuli trium continuè proportionalium quæsitarum genitoris.

MONITUM.

Si haberetur $a^4. c^2a^2. c^3d$ Π o. Facto a Π ce erit. $c^2e^2. e^3e. c^3d$ Π o, id est $e^2. ce. cd$ Π o. cognita autem e, statim noscetur a, per suppositionem. Quare hæc, & huic similes æquationes per traditas regulas solvi debent.

METHODUS BIMENSAS ÆQUATIONES DIRECTAS IN EVERSAS TRANSFORMANDI, AC SIMUL ILLAS INFINITIS MODIS SOLVENDI.

Proponatur directa æquatio bimensa $+ aa + ca - cd$ Π o, quæ in eversam transformanda, & simul infinitis modis solvenda sit.

Quæratur valor everſæ $+ee - 2me + m^2 \sqcap o,$
$$- \frac{mc}{d}$$
in qua m arbitrabilis cùm ſit, ſimul modus habetur illam infinitis modis ſolvendi.

Cognita autem e, ſtatim noſcetur a, etenim $\frac{m\sqrt{cd}}{\sqrt{me}} \sqcap a.$

ORDO CONSTRUCTIONIS.

Fiat 1° $d.\ m :: c.\ n \sqcap \frac{mc}{d}$

2°. $2m + n \sqcap z.$

3°. $\frac{1}{4} zz - mm \sqcap gg.$

4°. $\frac{1}{2} z \pm g \sqcap + f.$

5°. $\left\{ \begin{matrix} c.\ r.\ d \div\!\!\div \\ f.\ K.\ m \div\!\!\div \end{matrix} \right.$

6°. $K.\ m :: r.\ \frac{mr}{K} \sqcap a.$

EXPLICATIO NOTARUM.

Id eſt, ſi ad d, m, c inveniatur 4ª proportionalis n; & ſumma $+ 2m + n$ æqualis ſit z, differentia verò inter $+ \frac{1}{4} zz$ & $- mm$ æquetur gg; ac ſumma vel differentia $\frac{1}{2} z \pm g$ æqualis ſit f atque inter c & d, nec non inter f, & m reperiantur mediæ proportionales r, & K; ac tandem ad K, m, r ponatur 4ª proportionalis, illa erit æqualis quæſitæ a.

ILLUSTRATIO PER NUMEROS.

Proponatur in numeris directa æquatio bimenſa $+ aa + 8a - 48 \sqcap o$. Hîc $c \sqcap 8$, & $48 \sqcap cd$, & conſequenter

ſequenter $\frac{48}{8}$ ($6 \, \Pi \, \frac{cd}{c}$ (d. Eſto m quicumque numerus, verbi gratiâ, 10.

1° ($d. \; m :: c. \; n \, \Pi \, \frac{mc}{d} \, \Pi$) $6. \, 10 :: 8. \, \frac{40}{3} \, \Pi \, n$.

2° ($2m + n \, \Pi + 20 + \frac{40}{3} \, \Pi$) $+ \frac{100}{3} \, \Pi \, z$.

3° ($\frac{1}{4} zz - mm \, \Pi + \frac{2500}{9} - 100 \, \Pi$) $+ \frac{1600}{9} \, \Pi + gg$.

4° ($+ \frac{1}{2} z \pm g \, \Pi + \frac{50}{3} \pm \frac{40}{3} \, \Pi$) $+ 30$, vel $+ \frac{10}{3} \, \Pi + f$.

5° ($\sqrt{cd} \, \Pi$) $\sqrt{48} \, \Pi \, r$. & ($\sqrt{fm} \, \Pi$) $\sqrt{300} \, \Pi \, 10\sqrt{3} \, \Pi \, K$, vel $\sqrt{\frac{100}{3}} \, \Pi \, \frac{10}{\sqrt{3}} \, \Pi \, K$.

Ergo ($\frac{mr}{K} \, \Pi \, \frac{+10\sqrt{48}}{+10\sqrt{3}} \, \Pi$) $+ 4 \, \Pi \, a$. vel ($\frac{+10\sqrt{48}}{\frac{+10}{\sqrt{3}}} \, \Pi \, \sqrt{144} \, \Pi$) $+ 12 \, \Pi \, a$.

Quod quidem verum eſt, nam propoſitæ æquationis radices ſunt $+4$ & -12. cum hac ſola differentia quod radix negata -12, hîc tranſit in affirmatam propter æquationem everſam.

$+ ee - 2me + mm \, \Pi \, o$, cujus hîc facta eſt reſolutio per
$- \frac{mc}{d}$
canonis leges.

Poteſt etiam everſa æquatio in directam transformari, ac ſimul infinitis modis ſolvi, quamquam arbitrabilis litera, quæ in inveniendа æquatione, ad hunc effectum neceſſaria aliquam limitationem pati debeat.

Z

ALIA METHODUS BIMENSAS ÆQUATIONES DIRECTAS IN EVERSAS TRANSFORMANDI.

Postquam proposita æquatio ad hanc formam $+a^2 + ca - cf \,\Pi\, o$ reducta est, quæratur valor sequentis æquationis eversæ $+ee \left.\begin{matrix}-2f\\-c\end{matrix}\right\} e + ff \,\Pi\, o$. Et erit $f - e \,\Pi\, a$.

EXEMPLUM IN NUMERIS.

Esto $+aa + 3a - 10 \,\Pi\, o$. Hîc $+3 \,\Pi\, +c$, & $+\frac{10}{3} \,\Pi\, +f$. Igitur ex canonis lege habetur $+ee \left.\begin{matrix}-\frac{20}{3}\\-3\end{matrix}\right\} e + \frac{100}{9} \,\Pi\, o$. Ideſt $+ee - \frac{29}{3}e + \frac{100}{9} \,\Pi\, o$, & posito $\frac{y}{3} \,\Pi\, e$ fit $+yy - 29y + 100 \,\Pi\, o$, est autem $+y \,\Pi\, +\frac{29}{2} \pm (\sqrt{+\frac{841}{4} - 100} \;\Pi)\; \frac{21}{2}$. Ideſt $y \,\Pi\, +25$, vel $+4$. Ergo $e \,\Pi\, +\frac{25}{3}$, vel $+\frac{4}{3}$ & consequenter juxta regulam fit $+a \,\Pi\, +\frac{10}{3} - \frac{4}{3}$, vel $+\frac{10}{3} - \frac{25}{3}$. Ideſt $+a \,\Pi\, +2$, vel -5. Quod quidem verum est, nam propositæ æquationis radices sunt $+2$ & -5.

Atque sic omnes bimensæ æquationes per unicam, eamque valde simplicem regulam solvi possunt.

CAPUT III.

De Æquationibus trium dimensionum, earumque solutione.

INVESTIGATIO I.

P*Er resolutionem æqualitatis in proportionem, pro trimensis æquationibus, secundo termino carentibus.*

Illæ omnes ad sequentes formulas reducuntur.

$+ a^3 + cca - ccd \sqcap o.$
$+ a^3 + cca + ccd \sqcap o.$
$+ a^3 - cca - ccd \sqcap o.$
$+ a^3 - cca + ccd \sqcap o.$

Esto 1° $+ a^3 + cca - ccd \sqcap o$, sive per metathesim $+ a^3 + cca \sqcap + ccd$. Ergo $+ cc. + cc + aa :: + a. + d$. Idest □ 1ᵉ. □ 1ᵉ + □ 2ᵉ :: 2ᵃ. 2ᵃ + 4ᵃ. Quare hîc est intelligenda series quatuor continuè proportionalium, & ex datis primâ c F vel ꟸ, & d aggregato 2ᵉ, & 4ᵉ quæritur 2ᵃ a.

VEL SIC. Per aliam metathesim habetur $+ a^3 \sqcap - cca + ccd$. Ergo $+ cc. + aa :: + a. - a + d$. Idest □ 1ᵉ. □ 2ᵉ :: 2ᵃ. 4ᵃ. Quare hîc adhuc intelligenda est series quatuor continuè proportionalium, & ex datis 1ᵃ c F, vel ꟸ, & d aggregato 2ᵉ & 4ᵉ, quæritur 2ᵃ a, ut priùs.

VEL SIC FACILIUS. Per 1ᵃᵐ metathesim fit $+ a^3 + cca \sqcap + ccd$. Ergo $+ \frac{a^3}{cc} + a \sqcap + d$. Atqui $c. a. \frac{a^2}{c}. \frac{a^3}{cc}$ ∺. Hîc ergo ut priùs est intelligenda series quatuor continuè proportionalium, & ex datis 1ᵃ c F vel ꟸ, & d aggregato 2ᵉ, & 4ᵉ quæritur 2ᵃ a.

EXEMPLUM 1ᵘᵐ IN NUMERIS ABSOLUTIS.

Esto $+ a^3 + 64a - 320 \sqcap o$. Est hîc intelligenda series quatuor continuè proportionalium, nimirum 8. 4. 2. 1 ∺ & fit 1ᵃ $c \sqcap 8$, 2ᵃ $a \sqcap 4$. At d aggregatum 2ᵉ & 4ᵉ $\sqcap 5$.

EXEMPLUM 2ᵘᵐ IN NUMERIS ABSOLUTIS.

Esto $+ a^3 + 1a - 10 \sqcap o$. Est hîc intelligenda series quatuor continuè proportionalium, nimirum 1. 2. 4. 8 ∺, & fit 1ᵃ $c \sqcap 1$, 2ᵃ verò $a \sqcap 2$; At d aggregatum 2ᵉ, & 4ᵉ $\sqcap 10$.

EXEMPLUM 1ᵘᵐ IN NUMERIS SURDIS.

Esto $+ a^3 + 2a - 12 \sqcap o$. sunt hîc quatuor continuè

proportionales intelligendæ, nempe $\sqrt{2}$. 2. 4. $4\sqrt{2}$ ∻,

& fit 1^a $c \sqcap \sqrt{2}$, 2ª verò $a \sqcap 2$. At d aggregatum 2^x, & 4^x videlicet 6.

EXEMPLUM 2um IN NUMERIS SURDIS.

Esto $+a^3 + 8a - 24 \sqcap o$. Sunt hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, nempe $2\sqrt{2}$. 2. $\sqrt{2}$. 1 ∻, & fit 1^a $c \sqcap 2\sqrt{2}$, 2ª verò $a \sqcap 2$, At d aggregatum 2^x & 4^x, videlicet 3.

Esto 2° $+a^3 + cca + ccd \sqcap o$, sive per metathesim $+a^3 + cca \sqcap - ccd$. Ergo $+cc. + cc + aa :: + a. - d$. Ideſt □ 1^x. □ 1^x + □ 2^x :: 2^a. $2^a + 4^a$. sunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1^a c F vel ꟼ, cum d aggregato 2^x & 4^x, quæritur 2^a a, ut priùs.

VEL SIC. Per aliam metathesim habetur $+a^3 \sqcap - cca - ccd$. Ergo $+cc. + aa :: + a. - a - d$. Ideſt □ 1^x. □ 2^x :: 2^a. 4^a. sunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1^a c F, vel ꟼ, cum d aggregato 2^x, & 4^x, quæritur 2^a a, ut priùs.

VEL SIC FACILIUS. Per 1^{am} metathesim fit $+a^3 + cca \sqcap - ccd$. Ergo $+\frac{a^3}{cc} + a \sqcap - d$. Atqui $c. a. \frac{a^2}{c}. \frac{a^3}{cc}$ ∻ Ergo & cæt. ut priùs.

Patet hanc æquationem non differre ab ea quæ 1um proposita est, nisi per mutationem signorum in locis per pares numeros designatis.

Esto 3° $+a^3 - cca - ccd \sqcap o$, sive per metathesim $+a^3 - cca \sqcap + ccd$. Ergo $+cc. + aa - cc :: + a. + d$. Ideſt □ 1^x. □ 2^x − □ 1^x :: 2^a. $4^a - 2^a$. sunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1^a c ꟼ & differentiâ 2^x & 4^x, nimirum d, quæritur 2^a a.

VEL SIC. Per aliam metathesim habetur $+ a^3 \sqcap + cca + ccd$. Ergo $+ cc. + aa :: + a. + a + d$. Ideſt □ 1^x. □ 2^x : : 2^a. 4^a. ſunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1^a $c \sqcap$, & d differentiâ 2^x, & 4^x, quæritur 2^a a.

VEL SIC FACILIUS. Per 1^{am} metatheſim habetur $+ a^3 - cca \sqcap + ccd$. Ergo $\frac{+ a^3}{cc} - a \sqcap + d$. Atqui $c. a. \frac{a^2}{c}. \frac{a^3}{cc}$ ∺ ſunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1^a $c \sqcap$, & d differentiâ 2^x, & 4^x quæritur 2^a a.

VEL SIC. Per aliam metatheſim fit $- a^3 + cca \sqcap - ccd$. Ergo $- \frac{a^3}{cc}. + a \sqcap - d$. Atqui $c. a. \frac{a^2}{c}. \frac{a^3}{cc}$ ∺. ſunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1^a, $c \sqcap$, & d differentiâ 2^x & 4^x, quæritur 2^a a.

VEL HOC MODO. Per ultimam metatheſim habetur $- a^3 + cca \sqcap - ccd$. Ergo $+ cc. + cc - aa :: + a. - d$. Ideſt □ 1^x. □ 1^x — □ 2^x : : 2^a. 2^a — 4^a. ſunt ergo hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1^a $c \sqcap$, & d differentiâ 2^x & 4^x, quæritur 2^a a ut priùs.

EXEMPLA IN NUMERIS.

1um.

Eſto $+ a^3 - 1a - 6 \sqcap o$. ſunt hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, nimirum 1. 2. 4. 8 ∺, & fit 1^a $c \sqcap 1$; 2ª verò $a \sqcap 2$, at differentia 2^x, & 4^x nempe $6 \sqcap d$.

2um.

Eſto $+ a^3 - 64a - 192 \sqcap o$ eſt hîc intelligenda ſeries quatuor continuè proportionalium 8. 4. 2. 1 ∺ & fit 1^a $c \sqcap 8$. 2ª verò $a \sqcap 4$, at differentiâ 2^x & 4^x nempe $3 \sqcap d$.

Eſto 4° $+ a^3 = cca + ccd \sqcap o$, ſivè per metatheſim

$+ a^3 - cca \,\Pi - ccd$. Ergo $+ cc. + aa - cc :: + a. - d$. Ideſt $\square\, 1^{ae}. \square\, 2^{ae} - \square\, 1^{ae} :: 2^{a}. 4^{a} - 2^{a}$. eſt igitur hîc intelligenda ſeries quatuor continue proportionalium, & ex datis 1^{a} c ꟼ, & d differentiâ 2^{ae} & 4^{ae}, quæritur 2^{a} a.

VEL SIC. Per aliam metatheſim habetur $+ a^3 \,\Pi + cca - ccd$. Ergo $+ cc. + aa :: + a. + a - d$. Ideſt $\square\, 1^{ae}. \square\, 2^{ae} :: 2^{a}. 4^{a}$. ſunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1^{a} c F, & d differentiâ 2^{ae}, & 4^{ae}, quæritur 2^{a} nempe a.

Nec differt hæc æquatio ab ea, quæ tertio loco poſita eſt, niſi per ſignorum ſecundùm artem mutationem. Unde ſequitur quatuor præcedentes formulas ad duas reduci poſſe. Hinc

PROBLEMA I. VIETÆ.

In ſerie quatuor continuè proportionalium datis primâ, & ſummâ, vel differentiâ ſecundæ, & quartæ, ipſam ſecundam reperire.

Manifeſtum fit ex præmiſſis propoſitum problema difficultates omnes involvere, quæ in trimenſarum æquationum, 2do termino carentium ſolutionibus occurrere poſſunt.

ALITER.

Eſto 1° $+ a^3 + cca \,\Pi + ccd$. Ergo $+ c. + a :: + cc + aa. + cd$. Ideſt $1^{a}. 2^{a} :: \square\, 1^{ae} + \square\, 2^{ae}. + \sqsubset 1^{ae} \times 2^{am} + \sqsubset 2^{ae} \times 3^{am}$. vel per aliam interpretationem, ideſt $1^{a}. 3^{a} :: \square\, 1^{ae} + \square\, 3^{ae}. \square\, 2^{ae} + \square\, 4^{ae}$. Ergo 1° hîc eſt intelligenda ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis 1^{a} c F vel ꟼ, & d aggregato $\sqsubset 1^{ae} \times 2^{am}$ & $\sqsubset 2^{ae} \times 3^{am}$. Quæritur 2^{a} nempe a. Ergo 2° hîc eſt intelligenda ſeries quatuor continuè proportionalium. Atque ex datis 1^{a} c F vel ꟼ, & d aggregato $\square\, 2^{ae}$ & $\square\, 4^{ae}$, quæritur 3ª nempe a.

EXEMPLA IN NUMERIS.

1um.

Eſto $+ a^3 + 1\, a - 10 \,\Pi\, o$. Hîc eſt intelligenda ſeries

trium continuè proportionalium, nempe 1. 2. 4 ∺, & fit 1^a c Π + 1; 2ª verò a Π + 2, at d Π ($\boxminus 1^z \times 2^{am}$ + $\boxminus 2^z \times 3^{am}$ Π) 10.

2um.

Esto + a^3 + 1 a — 68 Π o. Hîc sunt quatuor continuè proportionales intelligendæ, nimirum 1. 2. 4. 8 ∺. Et fit 1^a c Π + 1, 2ª verò a Π + 4, at d Π ($\square 2^z$ + $\square 4^z$ Π) 68.

Esto 2° + a^3 + cca Π — ccd. Ergo + c. + a :: + cc + aa. — cd. Idest 1^a. 2^a :: $\square 1^z$ + $\square 2^z$. $\boxminus 1^z \times 2^{am}$ + $\boxminus 2^z \times 3^{am}$. Vel per aliam interpretationem idest 1^a. 3^a :: $\square 1^z$ + $\square 3^z$. $\square 2^z$ + $\square 4^z$. Ergo 1° hîc est intelligenda series trium continuè proportionalium, & ex datis 1^a c F vel Ꞃ, atque cd Π $\boxminus 1^z \times 2^{am}$ + $\boxminus 2^z \times 3^{am}$, quæritur 2^a a. Ergo 2° hîc intelligendæ sunt quatuor continuè proportionales, Atque ex datis 1^a c F vel Ꞃ, & cd Π + $\square 2^z$ + $\square 4^z$, quæritur 3^a nempe a.

Esto 3° + a^3 — cca Π + ccd. Ergo + c. + a :: + aa — cc. + cd. Idest 1^a. 2^a :: $\square 2^z$ — $\square 1^z$. + $\boxminus 2^z \times 3^{am}$ — $\boxminus 1^z \times 2^{am}$. Vel per aliam interpretationem idest 1^a. 3^a :: $\square 3^z$ — $\square 1^z$. $\square 4^z$ — $\square 2^z$. Quare 1° hîc est intelligenda series trium continuè proportionalium; Atque ex datis 1^a c Ꞃ, & cd differentiâ $\boxminus 1^z \times 2^{am}$ & $\boxminus 2^z \times 3^{am}$ quæritur 2^a nempe a. Ergo 2° hîc intelligendæ sunt quatuor continuè proportionales; Atque ex datis 1^a c Ꞃ, & differentiâ $\square 2^z$, & $\square 4^z$ nimirum cd, quæritur 3ª nempe a.

EXEMPLA IN NUMERIS.

1° esto + a^3 — 1 a — 6 Π o. Hîc intelligendæ sunt tres continuè proportionales, videlicet 1. 2. 4 ∺. & fit 1^a c Π + 1, 2ª verò a Π + 2, At d Π (+ $\boxminus 2^z \times 3^{am}$ — $\boxminus 1^z \times 2^{am}$ Π) 6.

2° esto + a^3 — 1 a — 60 Π o. Hîc intelligendæ sunt quatuor continuè proportionales nimirum 1. 2. 4. 8 ∺,

& fit 1^a c ⊓ $+1$, 3ª verò a ⊓ $+4$, at d ⊓ ($\square 4^z - \square 2^z$ ⊓) 60.

Esto 4° $+a^3 - cca$ ⊓ $-ccd$. Ergo $+c. +a :: +aa - cc. -cd$. Ideft $1^a . 2^a :: \square 2^z - \square 1^z . + \square 2^z \times 3^{am} - \square 1^z \times 2^{am}$. Vel per aliam interpretationem $1^a . 3^a :: \square 3^z - \square 1^z . \square 4^z - \square 2^z$. Ergo 1° hîc intelligenda eſt ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis 1^a c ⊓, & differentiâ $\square 1^z \times 2^{am}$, & $\square 2^z \times 3^{am}$ nimirum d, quæritur 2^a nempe a. Ergo 2° hîc intelligendæ ſunt quatuor continuè proportionales, & ex datis 1^a c ⊓, & differentiâ $\square 2^z$ & $\square 4^z$ nimirum cd, quæritur 3^a, nempe a ut priùs. Hinc duo emanant problemata videlicet.

PROBLEMA II.

In ſerie trium continuè proportionalium datis primâ, & aggregato, vel differentiâ bimenſi primæ in ſecundam, & bimenſi ſecundæ in tertiam, ipſam ſecundam reperire.

PROBLEMA III.

In ſerie quatuor continuè proportionalium datis primâ, & aggregato, vel differentiâ æquibimenſorum ſecundæ, & quartæ, ipſam tertiam reperire.

ADHUC ALITER.

Eſto 1° $+a^3 + cca - ccd$ ⊓ o. ſupponatur ay ⊓ cd. Ergo $+a^3 + cca - cya$ ⊓ o. Ideſt $+a^2 + cc - cy$ ⊓ o, vel $+aa$ ⊓ $-cc + cy$. Ergo $+c. +a. -c+y$ ∸. Hîc igitur intelligenda eſt ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis 1^a c ⊓, vel ⊓, & cd ⊓ $\square$ ſub media a, & extremarum ſumma y, quæritur media a, & altera extrema $+y-c$.

Eſto 2° $+a^3 + cca + ccd$ ⊓ o. Poſito ut priùs cd ⊓ ay fit $+a^3 + c^2a + cya$ ⊓ o, ideſt $+aa + cc + cy$ ⊓ o.

$\sqcap o$, vel per metathesim $+ aa \sqcap - cc - cy$. Ergo $+ c. + a. - c - y$ ÷÷. Hîc igitur intelligenda eſt ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis 1ª c F vel ꟼ, & $cd \sqcap$ ▭ ſub media a, & extremarum ſumma y, quæritur media a, & altera extrema $- c - y$.

Eſto 3° $+ a^3 - cca - ccd \sqcap o$. Poſito ut priùs $cd \sqcap ay$ fit $+ a^3 - cca - cya \sqcap o$, ideſt $+ aa - cc - cy \sqcap o$, vel per metathesim $+ aa \sqcap + cc + cy$. Ergo $+ c. + a. + c + y$ ÷÷. Hîc igitur intelligenda eſt ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis 1ª c ꟼ, & $cd \sqcap$ ▭ ſub media a, & extremarum differentia y, quæritur media a, & altera extrema $+ c + y$.

Eſto 4° $+ a^3 - cca + ccd \sqcap o$. Poſito ut priùs $cd \sqcap ay$ fit $+ a^3 - cca + cay \sqcap o$, ideſt $+ aa - cc + cy \sqcap o$, vel per metathesim $+ aa \sqcap + cc - cy$. Ergo $+ c. + a. + c - y$ ÷÷. Hîc igitur intelligenda eſt ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis 1ª c F, & $cd \sqcap$ ▭ ſub media a, & extremarum differentia y, quæritur media a, & altera extrema $+ c - y$. Quod adhuc clariùs ex talium æquationum geneſi apparebit.

GENESIS PRÆCEDENTIUM ÆQUATIONUM.

Eſto ſeries trium continuè proportionalium verbi gratia.

1ª	media	3ª
$c.$	$a.$	$\frac{aa}{c}$

Fiat 1° $\left(c + \frac{aa}{c} \times a \sqcap\right) ca + \frac{a^3}{c} \sqcap cd$.

Ergo $+ a^3 + cca - ccd \sqcap o$.

Fiat 2° $\left(c + \frac{aa}{c} \times a \,\Pi\right) ca + \frac{a^3}{c} \Pi - cd.$

Ergo $+ a^3 + cca + ccd \,\Pi\, o.$

Fiat 3° $\left(- c + \frac{a^2}{c} \times a \,\Pi\right) - ca + \frac{a^3}{c} \Pi + cd.$

Ergo $+ a^3 - cca - ccd \,\Pi\, o.$

Fiat 4° $\left(+ c - \frac{aa}{c} \times a \,\Pi\right) + ca - \frac{a^3}{c} \Pi + cd.$

Ergo $+ a^3 - cca + ccd \,\Pi\, o.$ Hinc sequitur.

PROBLEMA IV.

In serie trium continuè proportionalium datis primâ, atque bimenso sub media, & extremarum summa, vel differentia, mediam, & alteram extremam reperire.

INVESTIGATIO II.

Per resolutionem æqualitatis in proportionem pro trimensis æquationibus, tertio termino carentibus.

Illæ omnes ad quatuor sequentes formulas reducuntur.

$$+ a^3 + ca^2 - ccd \,\Pi\, o.$$
$$+ a^3 + ca^2 + ccd \,\Pi\, o.$$
$$+ a^3 - ca^2 - ccd \,\Pi\, o.$$
$$+ a^3 - ca^2 + ccd \,\Pi\, o.$$

Esto 1° $+ a^3 + ca^2 - ccd \,\Pi\, o$, vel per metathesim $+ a^3 + ca^2 \,\Pi + ccd$. Ergo $+ cc. + aa :: + c + a. + d$. Ideſt $\square\, 1^a. \square\, 2^a :: 1^a + 2^a. 3^a + 4^a$. Hîc igitur intelligenda eſt ſeries quatuor continuè proportionalium, & ex datis primâ cF, vel $\sqcap$, & d aggregato 3^a, & 4^a, quæritur 2^a a.

Vel ſic faciliùs $+ a^3 + ca^2 \,\Pi + ccd$. Ergo $+ \frac{a^3}{cc} + \frac{a^2}{c} \,\Pi + d$. Atqui $c. a. \frac{a^2}{c}. \frac{a^3}{cc}$ ∺.

Ergo hîc ut priùs intelligenda eſt ſeries quatuor continuè proportionalium, & ex datis 1^a cF vel $\sqcap$, & d aggregato 3^a & 4^a, quæritur 2^a a.

Vel secundum hanc interpretationem $+ a^3 + ca^2 \sqcap + ccd$. Ergo $+ c . + c + a :: + aa . + cd$. Ideſt $1^a . 1^a + 3^a :: \square 3^x . \square 3^x + \square 4^x$. Hîc igitur intelligenda eſt ſeries quatuor continuè proportionalium, & ex datis 1^a c F, vel ⊓, & cd aggregato $\square^{orum}$ 3^x, & 4^x, quæritur 3^a a.

Vel per aliam metatheſim fit $+ a^3 \sqcap - ca^2 + ccd$. Ergo $+ c . + a :: + aa . - aa + cd$. Ideſt $1^a . 2^a :: \square 2^x$. ▭ ſub 2^a & 3^a. Quare hîc intelligendæ ſunt tres continuè proportionales, & ex datis 1^a c F, vel ⊓, & cd aggregato $\square 2^x$, & ▭ ſub 2^a, & 3^a, quæritur 2^a a.

EXEMPLA IN NUMERIS.

Eſto $1^o + a^3 + 1a^2 - 12 \sqcap o$. Hîc intelligendæ ſunt quatuor continuè proportionales nimirum $1 . 2 . 4 . 8 \div$, & fit 1^a $c \sqcap + 1$, 2ª verò $a \sqcap + 2$, at $d \sqcap$ ($3^x + 4^a \sqcap$) 12.

Eſto $2^o + a^3 + 8a^2 - 192 \sqcap o$. Hîc pariter intelligendæ ſunt quatuor continuè proportionales nimirum $8 . 4 . 2 . 1 \div$, & fit 1^a $c \sqcap + 8$, 2ª verò $a \sqcap + 4$. at $d \sqcap$ ($3^x + 4^a \sqcap$) 3.

Eſto $3^o + a^3 + 1aa - 80 \sqcap o$. Hîc rurſus intelligendæ ſunt quatuor continuè proportionales, nimirum $1 . 2 . 4 . 8 \div$, & fit 1^a $c \sqcap + 1$, 3ª verò $a \sqcap + 4$, at $cd \sqcap$ ($\square 3^x + \square 4^x \sqcap$) 80.

Eſto $4^o + a^3 + 4aa - 24 \sqcap o$. Hîc intelligenda eſt ſeries trium continuè proportionalium, nimirum $4 . 2 . 1 \div$, & fit 1^a $c \sqcap + 4$, 2ª verò $a \sqcap + 2$, at $cd \sqcap$ ($\square 2^x +$ ▭ $2^x \times 3^{am} \sqcap$) 6.

Eſto $2^o + a^3 + ca^2 + ccd \sqcap o$, vel per metatheſim $+ a^3 + ca^2 \sqcap - ccd$. Ergo $+ cc . + aa :: + c + a . - d$. Ideſt $\square 1^x . \square 2^x :: 1^a + 2^a . 3^a + 4^a$.

Vel ſecundum hanc interpretationem $+ a^3 + ca^2 \sqcap - ccd$. Ergo $+ c . + c + a :: + aa . - cd$. Ideſt $1^a . + 3^a :: \square 3^x . \square 3^x + \square 4^x$. Vel per aliam metatheſim $+ a^3 \sqcap - ca^2 - ccd$. Ergo $+ c . + a :: + aa . - a^2 - cd$. Ideſt $1^a . 2^a :: \square 2^x$. ▭ ſub 2^a & 3^a.

Nec differt hæc æquatio, quantum ad hunc resolvendi modum attinet, ab ea quæ primo loco posita est, nisi quod in superiori quantitas d, vel cd affirmatur, hîc verò negatur.

Esto 3° $+ a^3 - ca^2 - ccd \sqcap o$, sive per metathesim $+ a^3 - ca^2 \sqcap + ccd$, ergo $+ cc. + aa :: + a - c. + d$. Ideſt $\square$ 1^x. $\square$ 2^x :: 2^a — 1^a. 4^a — 3^a. Hîc igitur intelligenda est series quatuor continuè proportionalium, & ex datis 1^a $c \sqcap$, & d differentiâ 3^x, & 4^x, quæritur 2^a a.

Vel sic faciliùs $+ a^3 - ca^2 \sqcap + ccd$ ergo $+ \frac{a^3}{cc} - \frac{aa}{cc} \sqcap d$. Atqui $c. a. \frac{a^2}{c}. \frac{a^3}{cc} \div$. Ergo hîc ut priùs intelligenda est series quatuor continuè proportionalium, & ex datis 1^a $c \sqcap$, & differentiâ 3^x,& 4^x,nempe d, quæritur 2^a a.

Vel secundum hanc interpretationem. $+ a^3 - ca^2 \sqcap + ccd$. Ergo $+ c. + a - c :: + aa. + cd$. Ideſt 1^a. 3^a — 1^a :: $\square$ 3^x. $\square$ 4^x — $\square$ 3^x. Hîc iterum intelligenda est series quatuor continuè proportionalium, & ex datis 1^a $c \sqcap$, & cd differentiâ $\square$ orum 3^x, & 4^x, quæritur 3^a a.

Vel per aliam metathesim $+ a^3 \sqcap + ca^2 + ccd$. Ergo $+ c. + a :: + aa. + aa + cd$. Ideſt 1^a. 2^a :: $\square$ 2^x. $\sqsubset\!\sqsupset$ sub 2^a, & 3^a. Hîc igitur intelligenda est series trium continuè proportionalium, & ex datis 1^a $c \sqcap$, & cd differentiâ $\square$ 2^x, & $\sqsubset\!\sqsupset$ sub 2^a, & 3^a, quæritur 2^a a.

EXEMPLA IN NUMERIS.

Esto 1° $+ a^3 - 1aa - 4 \sqcap o$. Hîc intelligenda est series quatuor continuè proportionalium nimirum 1. 2. 4. 8 $\div$, & fit 1^a $c \sqcap + 1$, 2ª verò $a \sqcap + 2$, at $d \sqcap$ (4^x — 3^a $\sqcap$) 4.

Esto 2° $+ a^3 - 1a^2 - 48 \sqcap o$. Hîc iterum intelligenda est series quatuor continuè proportionalium nimirum 1. 2. 4. 8 $\div$, & fit 1^a $a \sqcap + 1$, 3ª verò $a \sqcap + 4$, at $cd \sqcap$ ($\square$ 4^x — $\square$ 3^x $\sqcap$) 48.

Esto 3ª $+ a^3 - 1a^2 - 18 \,\Pi\, o$. Hîc intelligenda est series trium continuè proportionalium nimirum 1 . 3 . 9 ÷, & fit 1ª $c \,\Pi + 1$, 2ª verò $a \,\Pi + 3$, at $cd \,\Pi$ (▭ sub 3ª, & 4ª $- \square$ 2ª Π) 18.

Esto 4° $+ a^3 - ca^2 + c^2 d \,\Pi\, o$, vel per metathesim $+ a^3 - ca^2 \,\Pi - ccd$. Ergo 1° $+ cc . + aa :: + a - c . - d$, ergo 2° $+ c . + a - c :: + aa - cd$. Idest 1° □ 1ª . □ 2ª :: 2ª − 1ª . 4ª − 3ª. Idest 2° 1ª . 3ª − 1ª :: □ 3ª . □ 4ª − □ 3ª. sed cum hæc æquatio, quantum ad hunc resolvendi modum attinet, non differat ab ea quæ 3° loco posita est, nisi quod in illa quantitas d, vel cd affirmata, hîc transit in negatam, supervacuneum foret illam ulteriùs examinare. Hinc tria emanant problemata.

PROBLEMA V.

In serie quatuor continuè proportionalium, datis primâ, & aggregato, vel differentiâ tertiæ, & quartæ, ipsam secundam reperire.

PROBLEMA VI.

In serie quatuor continuè proportionalium, datis primâ, & aggregato, vel differentiâ æquibimensi tertiæ, & æquibimensi quartæ, ipsam tertiam reperire.

PROBLEMA VII.

In serie trium continuè proportionalium datis primâ, & aggregato, vel differentia æquibimensi secundæ, & bimensi secundæ in tertiam, ipsam secundam reperire.

ADHUC ALITER EX VIETA.

Esto 1° $+ a^3 + ca^2 - cdd \,\Pi\, o$, vel per metathesim $+ a^3 + ca^2 \,\Pi + cdd$. Ergo $+ c . + \frac{cd}{a} . + c + a$ ÷, & in hac trium continuè proportionalium serie fit 1ª $c \,\Pi$, 2ª

verò $\frac{cd}{a}$, at a differentia inter 1am, & 3am. Atqui $+c.$ $+\frac{cd}{a}::+a.+d.$ Ideſt 1a. 2a::+3a—1a.+4a—2a. ſunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1a c ⊓, & d differentia 2æ, & 4æ, quæritur a differentia 1æ, & 3æ.

Eſto 2° $+a^3+ca^2+cdd$ ⊓ o, ſive per metatheſim $-a^3-ca^2$ ⊓ $+cdd$. Ergo $+c.+\frac{cd}{a}.-a-c$ ∸, & in hac trium continuè proportionalium ſerie fit 1a c, 2a verò $\frac{cd}{a}$, at a ſumma 1æ & 3æ. Atqui $+c.+\frac{cd}{a}::+a.$ $+d.$ Ideſt 1a. 2a :: 1a+3a. 2a+4a. ſunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1a c ⊓, vel ⊓, & d aggregato ſecundæ & 4æ, quæritur a aggregatum 1æ, & 3æ.

Eſto 3° $+a^3-ca^2-cdd$ ⊓ o, ſive per metatheſim $+a^3-ca^2$ ⊓ $+cdd$. Ergo $+c.+\frac{cd}{a}.+a-c$ ∸, & in hac trium continuè proportionalium ſerie fit 1a c, 2a verò $\frac{cd}{a}$, at a ſumma 1æ & 3æ. Atqui $+c.+\frac{cd}{a}::+a.+d.$ Ideſt 1a. 2a :: 1a +3a. 2a+4a. ſunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1a c ⊓ vel ⊓, & d aggregato 1æ, & tertiæ, quæritur a aggregatum 2æ & 4æ ut priùs. Nec mirum quoniam hujus æquationis conſtitutio non differt à priori, niſi per artificioſam ſignorum mutationem.

Eſto 4° $+a^3-ca^2+cdd$ ⊓ o, ſive per metatheſim $-a^3+ca^2$ ⊓ $+cdd$. Ergo $+c.+\frac{cd}{a}.+c-a$ ∸, & in hac trium continuè proportionalium ſerie fit 1a c,

2ª verò $\frac{cd}{a}$, at a differentia $1^æ$, & $3^æ$. Atqui $+c. + \frac{cd}{a}$ :: $+a+d$. Ideſt $1^a . 2^a :: 1^a - 3^a . 2^a - 4^a$. ſunt igitur hîc quatuor continuè proportionales intelligendæ, & ex datis 1^a c ꟼ, & d differentia $2^æ$, & $4^æ$, quæritur a differentia $1^æ$, & $3^æ$, nec differt hæc æquatio ab ea quæ primò loco poſita eſt niſi per artificioſam ſignorum mutationem. Itaque

PROBLEMA VIII^{um}. EX VIETA.

In ſeriæ quatuor continuè proportionalium, datis primâ, & ſummâ, vel differentiâ ſecundæ & quartæ, invenire ſummam, vel differentiam primæ, & tertiæ.

ADHUC ALITER.

Eſto 1° $+a^3 + ca^2 - ccd \sqcap o$. Supponatur $cd \sqcap ay$. Fit $+a^3 + ca^2 - cya \sqcap o$, ideſt $+aa + ca - cy \sqcap o$, ſivè per metatheſim $+aa \sqcap - ca + cy$. Ergo $+c. +a. - a + y \sqcap o$. Quare hîc intelligenda eſt ſeries trium continuè proportionalium, & ex datis 1^a F vel ꟼ & $cd \sqcap$ ▭ ſub media a, & ſub y aggregato mediæ, & alteriùs extremæ, nempe ay, quæritur mediæ a, & altera extrema $-a+y$.

Eſto 2° $+a^3 + ca^2 + ccd \sqcap o$. Poſito ut priùs $cd \sqcap ay$ fit $+a^3 + ca2 + cya \sqcap o$, vel $+aa. + ca + cy \sqcap o$, ſive per metatheſim $+aa \sqcap - ca - cy$. Ergo $+c. + a. - a - y$ ∵. Hîc igitur intelligenda eſt ſeries trium connuè proportionalium, & ex datis 1^a F vel ꟼ nempe c, & $cd \sqcap$ ▭ ſub media a, & ſub y aggregato mediæ, & alteriùs extremæ nempe ay quæritur media a, & altera extrema $-a-y$, ut priùs

---

Eſto 3° $+a^3 - ca^2 - ccd \sqcap o$. Poſito ut ante $cd \sqcap ay$ fit $+a^3 - ca^2 - cya \sqcap o$, vel $+aa - ca - cy \sqcap o$, ſive

per metathesim $+ aa \sqcap + ca + ca + cy$. Ergo $+ c. + a. + c + y$ ∺. Hîc iterum intelligenda est series trium continuè proportionalium, & ex datis 1ª $c \sqcap$, & $cd \sqcap$ ▭ sub media a, & extremarum differentia, nempe ay, quæritur media a, & altera extrema $+ a + y$.

Esto 4° $+ a^3 - ca^2 + ccd \sqcap o$. Posito ut ante $cd \sqcap ay$, fit $+ a^3 - ca^2 + cya \sqcap o$, vel $+ aa - ca + cy \sqcap o$, sive per metathesim $+ a^2 \sqcap + ca - cy$, ergo $+ c. + a. + a - y$ ∺, atque hîc rursus intelligenda est series trium continuè proportionalium, & ex datis 1ª $c \sqcap$, & $cd \sqcap$ ▭ sub media a, & extremarum differentia y, nempe ay, quæritur media a, & altera extrema $+ a - y$. Quod adhuc clariùs ex talium æquationum genesi apparebit.

GENESIS PRÆCEDENTIUM ÆQUATIONUM.

Esto series trium continuè proportionalium, verbi gratiâ,

1ª.	media	3ª.
c.	a.	$\frac{aa}{c}$

Fiat 1° $\left(+ a + \frac{aa}{c} \times a \sqcap\right) + a^2 + \frac{a^3}{c} \sqcap cd$.

Ergo $+ a^3 + ca^2 - ccd \sqcap o$.

Fiat 2° $\left(a + \frac{a^2}{c} \times a \sqcap\right) + \frac{a^3}{c} + a^2 \sqcap - cd$.

Ergo $+ a^3 + ca^2 + ccd \sqcap o$.

Fiat 3° $\left(- a + \frac{a^2}{c} \times a \sqcap\right) - aa + \frac{a^3}{c} \sqcap + cd$.

Ergo $+ a^3 - ca^2 - ccd \sqcap o$.

Fiat 4° $\left(+ a - \frac{a^2}{c} \times a \sqcap\right) + a^2 - a^3 \sqcap + cd$.

Ergo $+ a^3 - ca^2 + ccd \sqcap o$. Itaque

PROBLEMA

PROBLEMA IX.

In serie trium continuè proportionalium datis primâ, & bimenso sub media, & aggregato, vel differentiâ mediæ, & alterius extremæ, ipsam mediam, & alteram extremam reperire.

SCHOLIUM.

Hæc propterea exequutus sum pluribus, quod illa æquationum in proportiones resolutio non modicam utilitatem per se ferens, amplam pulcherrimis speculationibus materiam suppeditet. Neque enim in bimensis, aut trimensis æquationibus tantùm, ut jam ostensum est, vim suam exercet, verùm etiam in altioribus quibuslibet æquationibus, tribus solummodò terminis, 1º videlicet, ultimo, & aliquo mediorum constantibus, locum habet, in quibus similia prorsus quàm hîc ostensa sunt, & per easdem argumentationes concludere licet. Quin imò ejusdem artis resolutoriæ operâ earum omnium æquationum sive defectivarum, sive completarum, & ad quemcumque gradum ascendentium natura, atque constitutio agnosci potest, in quibus intermediorum terminorum coëfficientes talem inter se relationem habent ut secundi, sive primi intermedii termini coëfficiens cæterorum coëfficientium radix existens, ipsos omnes per iteratam sui multiplicationem successivè producat, hoc est ut tertii termini coëfficiens æquibimensum sit coëfficientis secundi, quarti verò coëfficiens æquitrimensum sit ejusdem coëfficientis secundi, & sic de cæteris; servato semper hoc ordine in defectivis æquationibus nihilo secius ac si omnes termini adessent. Nam in hujusmodi æquationibus intelligenda erit aliquot continuè proportionalium series; & ex datis 1ª, videlicet coëfficiente secundi termini, & aggregato vel differentiâ aliquarum mediarum proportionalium, vel certarum potestatum ab ipsis, quæretur ignota propositæ æquationis quantitas, quæ erit aliqua, vel aliquarum summa vel differentia ex mediis proportionalibus, in intelligenda serie constitu-

tis. Quæ cùm omnia per se plana sint, & ex prævia de bimensis & trimensis æquationibus in proportionem resolvendis doctrina sponte suâ sequantur, prolixiori non egent explicatione.

Sed, quod valdè notatu dignum est, ex inventis problematibus apparet incognitam propositarum æquationum quantitatem, quamvis invariata maneat, diversas tamen sortiri denominationes, verbi gratiâ, esto $+ a^3 + caa - ccd \sqcap o$, vel $+ a^3 + caa - cdd \sqcap o$.

1°, Per 5um Problema hîc est intelligenda series quatuor continuè proportionalium, ubi 1a F, vel ∏ est c; 2a verò a, at d aggregatum tertiæ & quartæ.

2°, Per 6um Problema hîc intelligenda est series quatuor continuè proportionalium, ubi 1a F, vel ∏ est c, 3a verò a, at cd aggregatum □orum 3æ & 4æ.

3°, Per 8um Problema hîc adhuc intelligenda est series quatuor continuè proportionalium, ubi 1a ∏ est c, differentia verò 1æ & 3æ est a, at d differentia 2æ & 4æ, & sic de cæteris.

EXEMPLA IN NUMERIS.

Esto series quatuor continuè proportionalium 1. 2. 4. 8 ∺, & ponatur a pro incognita quantitate.

$$\begin{array}{cccc} & +c & -ccd & \\ +a^3 & +1a^2 & -12 & \sqcap o \end{array}$$

Per 5um Problema fit $+ a^3 + 1a^2 - 12 \sqcap o$, estque $a \sqcap$ 2æ nempe + 2.

$$\begin{array}{cccc} & +c & -ccd & \\ +a^3 & +1a^2 & -80 & \sqcap o \end{array}$$

Per 6um Problema fit $+ a^3 + 1a^2 - 80 \sqcap o$, estque $a \sqcap$ 3æ, nempe + 4.

$$\begin{array}{cccc} & +c & -cdd & \\ +a^3 & +1a^2 & -36 & \sqcap o \end{array}$$

Per 8um Problema fit $+ a^3 + 1a^2 - 36 \sqcap o$, estque $a \sqcap$ 3æ — 1a, nempe + 3; c verò $\sqcap$ 1æ, nempe + 1, at $d \sqcap$ 4æ — 2a nempe + 6.

Jam ut in eadem æquatione differentes illæ ejusdem ignotæ quantitatis denominationes conspiciantur.

Sumamus 1° $+ a^3 + 1 a^2 - 12 \sqcap o$, ubi est series quatuor continuè proportionalium, nimirum 1. 2. 4. 8 ∻, & fit $a \sqcap 2^x$ nempe 2.

Per 6um Problema fit $a \sqcap (+2 \sqcap) 3^x$, ergo $\sqrt{2}|$ $\sqcap 2^x$, & sic erit sequens series 1. $\sqrt{2}|$. 2. $2\sqrt{2}|$ ∻.

Per 8um Problema fit $a \sqcap (+2 \sqcap) 3^x - 1^x$, ergo 3^a est 3 (nam $3 - 1 \sqcap 2$). Quare erit hæc series 1. $\sqrt{3}|$. 3. $3\sqrt{3}|$ ∻.

Sumamus 2°. $+ a^3 + 1 a^2 - 80 \sqcap o$, ubi est series quatuor continuè proportionalium, nimirum 1. 2. 4. 8 ∻, & fit $a \sqcap + 4$ per 6um Problema.

Per 5um Problema fit $+ a \sqcap (+4 \sqcap) 2^x$. Quare erit hæc series 1. 4. 16. 64 ∻

Per 8um Problema fit $+ a \sqcap (+4 \sqcap) 3^x - 1^x$, ergo 3^a $\sqcap + 5$ (nam $5 - 1 \sqcap 4$), & sic habetur sequens series 1. $\sqrt{5}|$. 5. $5\sqrt{5}|$ ∻

Sumamus 3° $+ a^3 + 1 aa - 36 \sqcap o$, ubi eadem est series quatuor continuè proportionalium, nimirum 1. 2. 4. 8 ∻, & fit $a \sqcap 3$, per 8um Problema.

Per 5um Problema fit $a \sqcap (+3 \sqcap) 2^x$. Ergo erit hæc series 1. 3. 9. 27 ∻

Per 6um Problema fit $a \sqcap (+3 \sqcap) 3^x$. Ergo $2^a \sqcap \sqrt{3}|$ & sic erit hæc series 1. $\sqrt{3}|$. 3. $3\sqrt{3}|$ ∻

In his omnibus proportionalium seriebus pro qualibet æquatione acceptis, ultimus terminus idem manens diversas etiam denominationes accipit, & à diversis quantitatibus producitur, ut manifestum est ex jam explicata propositarum æquationum natura.

INVESTIGATIO III.

Pro solutione trimensarum æquationum secundo termino carentium, per novam genesim, atque constitutionem.

Esto $+ mmn \sqcap + y^3$. Ergo $m. y. \frac{mn}{y}$ ∻, & fit $mn \sqcap \sqsupset$ sub 2^a, & 3^a.

Ponatur 1° $+ a \sqcap 2^x + 3^a$. Ergo $+ \frac{1}{2} a \pm$

$\sqrt{\frac{1}{4}aa - mn}\ \Pi\ \frac{2^2}{3^2}$. Ergo $+m. + \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - mn}\ . + \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - mn} \div\!\div$ (quando videlicet $m \,\Gamma\, y$; sed in inventa trium continuè proportionalium serie perinde est sive ponas $m\ \Pi$ vel $\Gamma\, y$, idest sive ponas $+\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - mn}$ pro 2^2, aut 3^2, nam eadem semper proveniet æquatio) Ergo etiam $+\frac{1}{2}ma - m\sqrt{\frac{1}{4}aa - mn}\ \Pi + \frac{1}{2}aa - mn + a\sqrt{\frac{1}{4}aa - mn}$, sive per metathesim $\frac{a}{m}\sqrt{\frac{1}{4}aa - mn}\ \Pi - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}ma + mn$, & utramque partem in se ducendo fit $+\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}ma^3 \begin{matrix} +\frac{1}{4}m^2 \\ -mn \end{matrix}\Big\} a^2 - 2m^2na - m^3n\ \Pi + \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{2}ma^3 \begin{matrix} -mn \\ +\frac{1}{4}m^2 \end{matrix}\Big\} a^2 + m^2na + m^2n^2$, & ordinata æquatione habetur $+a^3 - 3mna - \begin{matrix} m^2n \\ -mn^2 \end{matrix}\ \Pi\ o$.

Jam proponatur $+a^3 - qa - r\,\Pi\, o$. Ergo $+q\ \Pi + 3mn$, sivè $+\frac{1}{3}q\ \Pi + mn$, atque $+r\ \Pi + m^2n + mn^2$, vel mutando mn in suum valorem $\frac{1}{3}q$ habetur $+r\ \Pi + \frac{1}{3}qm + \frac{1}{3}qn$, ergo $+\frac{3r}{q}\ \Pi + m + n$. Igitur $+\frac{3r}{2q} \pm \sqrt{+\frac{9rr}{4qq} - \frac{1}{3}q}\ \Pi\ \frac{m}{n}$, quod ductum in ($mn\ \Pi$) $\frac{1}{3}q$ oritur $+\frac{1}{2}r + \sqrt{+\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$

$\Pi + y^3$ quando $m \Pi n$, & consequenter.

$$\frac{+\sqrt[3]{+\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{4}rr-\frac{1}{27}q^3}}\;+\frac{1}{3}q}{+\sqrt[3]{+\frac{1}{2}r+\sqrt{\frac{1}{4}rr-\frac{1}{27}q^3}}}\;\Pi + a.$$

Ponatur $2^o + e \,\Pi\, 2^z - 3^z$. Ergo $\pm \frac{1}{2}e + \sqrt{+\frac{1}{4}e^2 + mn} \;\Pi\; \frac{2^z}{3^z}$. Ergo $+ m. + \frac{1}{2}e + \sqrt{\frac{1}{4}ee + mn} \,.\, - \frac{1}{2}e + \sqrt{\frac{1}{4}e^2 + mn} \div$.

Igitur $-\frac{1}{2}me + m\sqrt{\frac{1}{4}e^2 + mn} \;\Pi + \frac{1}{2}e^2 + mn + e\sqrt{\frac{1}{4}e^2 + mn}$ sivè per metathesim $\begin{matrix}-e\\+m\end{matrix}\sqrt{\frac{1}{4}e^2 + mn} \;\Pi + \frac{1}{2}ee + \frac{1}{2}me + mn$, & utramque partem in se ducendo habetur

$$+\frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{2}me^3 + \left.\begin{matrix}\frac{1}{4}m^2\\+mn\end{matrix}\right\} e^2 - 2mne + m^3n \;\Pi$$

$$\frac{1}{4}e^4 + \frac{1}{2}me^3 + \left.\begin{matrix}mn\\+\frac{1}{4}m^2\end{matrix}\right\} \begin{matrix}e^2 + m^2ne\\+m^2n^2\end{matrix}$$ & ordinatâ æquatione habetur $+ e^3 + 3mne - \begin{matrix}m^2n\\+mn^2\end{matrix} \,\Pi\, o$.

Jam proponatur $+ e^3 + qe - r \,\Pi\, o$. Ergo $q \,\Pi\, 3mn$, sivè $\frac{1}{3}q \,\Pi\, mn$, & $- r \,\Pi - m^2n + mn^2$, vel $+ r \,\Pi + m^2n - mn^2$, sive mutando mn in suum valorem $\frac{1}{3}q$ ha-

betur $+ r \Pi + \frac{1}{3} qm - \frac{1}{3} qn$, ideſt $+ \frac{3r}{q} \Pi + m - n$. Ergo $+ \frac{3r}{2q} + \sqrt[1]{\frac{9rr}{4qq} + \frac{1}{3}q} \, \Pi + m$, quâ æquatione ductâ in $(mn\Pi)\ \frac{1}{3}q$ habetur $+\frac{1}{2} r + \sqrt[1]{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3} \, \Pi + y^3$, & conſequenter $+\sqrt[3\,1]{+\frac{1}{2} r + \sqrt{\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27}q^3}}$

$$\frac{-\frac{1}{3} q}{+\sqrt[3\,1]{+\frac{1}{2} r+\sqrt{\frac{1}{4} rr+\frac{1}{27}q^3}}} \quad \Pi + a.$$

EXEMPLA IN NUMERIS.

Eſto 1° $+a^3 - 1a - 6 \, \Pi \, o$. Hîc $+a\Pi+2$; $+q\Pi$
$-q \quad -r$
$+1$, & $+r\Pi+6$. Quare juxta regulam fit $+$

$$\sqrt[3\,1]{3+\sqrt{9-\frac{1}{27}}} \quad \frac{+\frac{1}{3}}{+\sqrt[3\,1]{+3+\sqrt{+9-\frac{1}{27}}}} \quad \Pi(+a\Pi)+2$$

OSTENSIO.

Brevitatis cauſâ ponatur $+m\,\Pi+\sqrt[3\,1]{+3+\sqrt{+9-\frac{1}{27}}}$. Igitur $+m + \frac{\frac{1}{3}}{m}\Pi + 2$, ideſt $+mm+\frac{1}{3}\Pi+2m$, vel ordinatâ æquatione $+3.mm-6m\,\Pi-1$, & utramque partem $\boxed{3}$do habetur $27m^6 - 216 m^3 + 54 m^3 \, \Pi - 1$, ideſt $+27m^6 - 162 m^3 \, \Pi -1$.

Atqui $+m^6\,\Pi+18-\frac{1}{27}+6\sqrt{+9-\frac{1}{27}}$, & $+27m^6\,\Pi+486-1+162\sqrt{+9-\frac{1}{27}}$. Pariter $+m^3\,\Pi+3+\sqrt{+9-\frac{1}{27}}$, & $-162m^3\,\Pi-486-162\sqrt{+9-\frac{1}{27}}$,

quæ duæ summæ inter se junctæ efficiunt $-1 \,\Pi\, -1$, ut erat ostendendum.

Esto $2^0 + e^3 + 1e - 10 \,\Pi\, o$. Hîc $+e \,\Pi\, +2$, $+q \,\Pi\, +$
$+q - r$
1, & $+r \,\Pi\, +10$, quare juxta regulam fit

$$\sqrt[3]{+5+\sqrt{+25+\frac{1}{27}}} - \frac{\frac{1}{3}}{+\sqrt[3]{+5+\sqrt{+25+\frac{1}{27}}}} \;\Pi\; +2$$

OSTENSIO.

Brevitatis causâ ponatur $+m \,\Pi\, + \sqrt[3]{+5+\sqrt{+25+\frac{1}{27}}}$. Igitur $+m - \frac{\frac{1}{3}}{m} \,\Pi\, +2$; idest $+mm - \frac{1}{3} \,\Pi\, +2m$, vel ordinatâ æquatione habetur $+3mm - 6m \,\Pi\, +1$, & utramque partem $\boxed{3}$do habetur $+27m^6 - 216m^3 - 54m^3 \,\Pi\, +1$, idest $+27m^6 - 270m^3 \,\Pi\, +1$.

Atqui $+m^6 \,\Pi\, +50 + \frac{1}{27} + 10\sqrt{+25+\frac{1}{27}}$, & $27m^6 \,\Pi\, +1350 + 1 + 270\sqrt{25+\frac{1}{27}}$, & $+m^3 \,\Pi\, +5 + \sqrt{+25+\frac{1}{27}}$, & $-270m^3 \,\Pi\, -1350 - 270\sqrt{+25+\frac{1}{27}}$ quæ duæ summæ inter se junctæ efficiunt $+1 \,\Pi\, +1$, ut erat ostendendum.

ALITER PRO EADEM INVESTIGATIONE.

Esto $1^0 + a \,\Pi\, + \sqrt[3]{m^2 n} + \sqrt[3]{mn^2}$, & utramque partem $\boxed{3}$do fit $+a^3 \,\Pi\, + m^2 n + mn^2 + 3mn \times (+\sqrt[3]{m^2 n} + \sqrt[3]{mn^2} \,\Pi) + a$. Ergo $+a^3 = 3mna - m^2 n \,\Pi\, o$.
$- mn^2$

Eſto 2° $+ a \,\Pi + \sqrt[3]{m^2 n} \,|\, - \sqrt[3]{m n^2} \,|$, & utramque partem $|\boxed{3}|^{do}$ fit $+ a^3 \,\Pi + m^2 n - m n^2 - 3 m n \times (+ \sqrt[3]{m^2 n} \,| - \sqrt[3]{m n^2} \,| \,\Pi) + a$. Ergo $+ a^3 + 3 m n a - m^2 n \,\Pi\, o$.
$+ m n^2$

Quare 1° ſi ſit $+ a^3 - q a - r \,\Pi\, o$. Erit a ſumma duarum $\sqrt[2]{}$, quarum productum eſt $\frac{1}{3} q$, ſumma verò æquitrimenſorum ab ipſis eſt $+ r$.

Quare 2° ſi ſit $+ a^3 + q a - r \,\Pi\, o$. Erit a differentia duarum $\sqrt[3]{}$, quarum productum eſt $+ \frac{1}{3} q$; differentia verò $|\boxed{3}|^{orum}$ ab ipſis fit $+ r$.

Nam ſi $3 m n$ interpretemur per q, & $+ m^2 n + m n^2$, vel $+ m^2 n - m n^2$ per $+ r$ exſurget $+ a^3 - q a - r \,\Pi\, o$, vel $+ a^3 + q a - r \,\Pi\, o$, ut priùs.

Quoniam verò $\square^{um}$ à dimidia ſumma duorum $|\boxed{3}|^{orum}$ ſemper excedit $\square^{um}$ ▭^{i} ſub eorum radicibus (etenim $\left(\square \frac{m^2 n + m n^2}{2} \,\Big|\, \Pi\right) \frac{+ m^4 n^2 + 2 m^3 n^3 + m^2 n^4}{4}$, & $(|\boxed{3}|$ ▭ $m n \,\Pi) + m^3 n^3$, quibus terminis in 4 ductis fit $m^4 n^2 + 2 m^3 n^3 + m^2 n^4$, & $+ 4 m^3 n^3$, & ablatis utrimque $+ 2 m^3 n^3$, relinquitur $+ m^4 n^2 + m^2 n^4 \mp 2 m^3 n^3$) eſtque ipſe ultimus terminus in æquatione $+ a^3 - q a - r \,\Pi\, o$ ſumma 2^{orum} $|\boxed{3}|^{orum}$, quorum triplex ▭^{um} æquatur coefficienti penultimi termini; hinc fit ut hujuſmodi formulæ æquationes non ſemper eumdem habeant generationis ſuæ ortum. Nam quando æquitrimenſum à triente coefficientis penultimi termini ſuperat æquibimenſum ab ultimi dimidio, tunc aliam ſortiuntur dictæ æquationes conſtitutionem, ut poſteà videbimus.

LEMMA GENERALE.

Æquibimenſum differentiæ duarum ejuſdem gradus poteſtatum, plus quadruplà ſimili poteſtate bimenſi ſub earum radicibus æquatur æquibimenſo aggregati ipſarum poteſtatum.

Sunto

Sunto duæ quælibet ejuſdem gradus poteſtates a^3, & e^3.

Multiplicatio 1ª.

$\left.\begin{matrix} + a^3 - e^3 \\ + a^3 - e^3 \end{matrix}\right\}$ differentia $\boxed{3}$orum

Multiplicatio 2ª.

$+ a e$
$+ a e$ ▭um ſub a, & e
$+ a e$

$+ a^3 e^3 \, \Pi \, \boxed{3}^{o}$ ▭ᶦ $a e$

Productum $\left.\begin{matrix} + a^6 - 2 a^3 e^3 + e^6 \\ + 4 a^3 e^3 \end{matrix}\right\}$ additio

Summa $+ a^6 + 2 a^3 e^3 + e^6 \, \Pi \, \square^{o} \, \overline{+ a^3 + e^3}|$. ut erat oſtendendum.

Quoniam verò dum inter ſe duo æquitrimenſa junguntur, vel unum ab alio demitur, ſic ut eorum ſumma, vel differentia ad hanc formam reducatur $c c d$, exiſtente $c c \, \Pi$ ▭ ſub ipſorum $\boxed{3}$orum radicibus, fit d ſumma vel differentia duarum quantitatum, quæ cum dictorum $\boxed{3}$orum radicibus intermediis conſtituunt ſeriem quatuor continuè proportionalium: hinc, & ex reliqua hujus inveſtigationis doctrina plures methodi eruuntur ſolvendi æquationes trium dimenſionum, quæ duarum mediarum proportionalium inventionem requirunt. Verùm operæpretium eſt quod mox aſſeruimus obiter demonſtrare.

Sunto $a . \sqrt[3]{a a e}| . \sqrt[3]{a e e}| . e$ ÷ fit $a a e \pm a a e \, \Pi \, a e \times a \pm e$. Quod ſi $a \pm e$ interpretemur per d, & $a e$ per $c c$, fiet $c c d \, \Pi \, a a e \pm a e e$: hoc eſt ſi ſumma, vel differentia duorum æquitrimenſorum $a a e \pm a e e$ æqualis ſit $c c d$, erit d æqualis $a \pm e$, quæ eſt ſumma, vel differentia duarum quantitatum, quæ cùm dictorum $\boxed{3}$orum radicibus intermediis conſtituunt ſeriem quatuor continuè proportionalium, at $c c$ æquabitur bimenſo ſub dictorum $\boxed{3}$orum radicibus comprehenſo.

EXTRACTIO RADICIS

EX OMNIBUS TRIMENSIS ÆQUATIONIBUS, QUÆ PER MESOLABUM RESOLVI POSSUNT.

Esto 1° $+ a^3 + qa - r \,\Pi\, o$. Jam per præmiſſorum doctrinam agnoſcitur in hac æquatione intelligendas eſſe duas radices quarum bimenſum eſt $+ \frac{1}{3} q$, differentia verò a, at differentia $\boxed{3}$orum ab ipſis fit r,

Quare ponatur $e^3 \,\Pi\, \boxed{3}\, F$, ergo $+ e^3 - r \,\Pi\, \boxed{3}\, \eta$, ut patet ex antè dictis, & per præmiſſum Lemma fit $\Box\, \overline{+ 2e^3 - r} \,\Pi\, + rr + \frac{4}{27} q^3$. Ergo $+ 2e^3 - r \,\Pi\, + \sqrt{+ rr + \frac{4}{27} q^3}$, vel $+ e^3 \,\Pi\, + \frac{1}{2} r + \sqrt{+ \frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3}$,

& conſequenter

$$+ \sqrt[3]{+ \frac{1}{2} r + \sqrt{+ \frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3}} \quad \frac{-\frac{1}{3} q}{+ \sqrt[3]{+ \frac{1}{2} r + \sqrt{\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3}}} \,\Pi\, + a.$$

Quod ſi pro $\boxed{3}\, \eta$ poſuiſſem e^3 habuiſſem $+ e \,\Pi\, + \sqrt[3]{- \frac{1}{2} r + \sqrt{+ \frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3}}$, ut manifeſtum eſt.

Nec differt hæc radicis extractio ab ea quæ primùm inventa eſt, cujus auxilio æquationes trimenſæ affectæ, & per meſolabum reſolubiles, ad puras revocantur.

ALITER, ET FACILLIME.

Poſito $+ a^3 + 3cca - ccd \,\Pi\, o$, manifeſtum eſt ex antè dictis, d eſſe differentiam duarum quantitatum, quæ cum duorum $\boxed{3}$orum radicibus intermediis quarum bimenſum eſt $+ \frac{1}{3} cc$, & quarum differentia eſt a, conſtituunt ſeriem quatuor continuè proportionalium.

Igitur $\pm \frac{1}{2} d + \sqrt{+ \frac{1}{4} dd + \frac{1}{3} cc} \,\Pi\, \begin{matrix} +m, \text{ majori.} \\ +n, \text{ minori.} \end{matrix}$

& conſequenter $+ a \,\Pi\, + \sqrt[3]{mmn} - \sqrt[3]{mmn}$.

Si verò ita proponatur æquatio $+a^3 + qa - r \,\Pi\, o$ erit $d \,\Pi\, \frac{+3r}{q}$, & consequenter $\pm \frac{3r}{2q} + \sqrt{\frac{9rr}{4qq} + \frac{1}{3}q} \,\Pi\, \frac{+m}{+n}$. Quare, ut priùs, erit $+a \,\Pi\, + \sqrt[3]{mmn} - \sqrt[3]{mmn}$.

EXEMPLA IN NUMERIS.

Esto $+a^3 + \underset{+q}{24a} - \underset{-r}{56} \,\Pi\, o$, fit $\frac{1}{3}q \,\Pi\, +8$, & $\frac{+3r}{q} \,\Pi\, +7$, ergo juxta canonis legem fit $\left(\pm \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{+49}{4} + 8} \,\Pi\right) \frac{9}{2} \,\Pi\right) \frac{+8}{+1} \,\Pi\, \frac{+m}{+n}$. Ergo $+a \,\Pi\, + \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{8}$, id est $+a \,\Pi\, +2$, quod quidem verum est.

ADHUC ALITER SED DIFFICILIÙS.

Posito ut priùs $+a^3 + qa - r \,\Pi\, o$. Fiat $e \,\Pi$ radici $|\boxed{3}|^{1}$ Ꞁ, ergo $\frac{+q}{3e} \,\Pi$ radici $|\boxed{3}|^{1}$ F. Quare $\frac{+q^3}{27e^3} - e^3 \,\Pi\, +r$, per præmissum lemma, vel $+e^6 \,\Pi\, -re^3 \frac{+qr}{27}$. Ergo $e^3 \,\Pi\, -\frac{1}{2}r + \sqrt{+\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}$, & consequenter $+e \,\Pi\, + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}}$.

At posito $y \,\Pi$ radici $|\boxed{3}|$ F fit $+y^3 \frac{-q^3}{27y^3} \,\Pi\, +r$. Ergo $+y^6 \,\Pi\, +ry^3 + \frac{1}{27}q^3$, igitur $y^3 \,\Pi\, +\frac{1}{2}r + \sqrt{+\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}$, & consequenter $+y \,\Pi\, + \sqrt[3]{+\frac{1}{2}r + \sqrt{+\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}}$. Ergo $(y - e \,\Pi) + a \,\Pi$ $+ \sqrt[3]{\frac{1}{2}r + \sqrt{+\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{+\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}}$.

Hoc idem per præmissum lemma sine ulla suppositione sic concluditur. Nam inde sequitur $+ rr \frac{4}{27} q^3$ æquari æquibimenso aggregati duorum æquitrimensorum, quorum differentia est $+ r$ Ergo $\sqrt{+ rr + \frac{4}{27} q^3}|$ Π aggregato dictorum $\boxed{3}$orum, & $\sqrt{+ \frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3}|$ Π dimidio ejusdem aggregati, cui additâ, vel demptâ semidifferentiâ ipsorum $\boxed{3}$orum nempe $\frac{1}{2} r$ fit $+ \frac{1}{2} r + \sqrt{+ \frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3}|$ Π $\boxed{3}$ F, & $- \frac{1}{2} r + \sqrt{+ \frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3}|$ Π $\boxed{3}$ ꟻ; differentia verò radium ab his $\boxed{3}$is, sive radix æquationis propositæ est

$$\begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \sqrt[3]{+ \frac{1}{2} r + \sqrt{+ \frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3}} \\ \sqrt[3]{- \frac{1}{2} r + \sqrt{+ \frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3}} \end{matrix} \right\} \Pi + a,$$ ut priùs.

Esto 2° $+ a^3 - qa - r \, \Pi \, o$. Quia $\frac{3r}{q}$ est summa duarum quantitatum, quæ cum duorum æquitrimensorum radicibus intermediis quarum ▭um est $\frac{1}{3} q$, & quarum summa est a constituunt seriem quatuor continuè proportionalium. Igitur

$$+ \frac{3r}{2q} \pm \sqrt{+ \frac{9}{4} \frac{rr}{qq} - \frac{1}{3} q} \; \Big| \; \Pi \begin{matrix} + m. \\ + n. \end{matrix}$$

Igitur erit $a \, \Pi + \sqrt[3]{m^2 n}| + \sqrt[3]{mn^2}|$

ALITER.

Posito ut priùs e Π radici $\boxed{3}$ F, vel ꟻ fit $\frac{q}{3e}$ Π radici alterius $\boxed{3}$i, ergo $+ e^3 + \frac{q^3}{27 e^3} \, \Pi + r$, & $e^6 \, \Pi$ $+ re^3 - \frac{1}{27} q^3$, ergo

$$+ e^3 \, \Pi + r \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} rr - \frac{1}{27} q^3} \; \Big| .$$ Ergo

$$+a \,\Pi\, + \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[3]{+\tfrac{1}{2}r + \sqrt{\tfrac{1}{4}rr - \tfrac{1}{27}q^3}} \\ + \sqrt[3]{+\tfrac{1}{2}r - \sqrt{\tfrac{1}{4}rr - \tfrac{1}{27}q^3}}. \end{array} \right\}$$

Hoc idem per præmissum lemma sine ulla suppositione sic concluditur. Nam inde sequitur $+rr - \frac{4}{27}q^3 \,\Pi\, \square^o$ differentiæ duorum $\boxed{3}$orum, quorum summa est r, ex propositæ æquationis constitutione. Quamobrem $\sqrt{+rr - \frac{4}{27}q^3} \,\Pi$ differentiæ dictorum $\boxed{3}$orum, & $+\sqrt{+\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3} \,\Pi$ semidifferentiæ ipsorum, quæ addita & dempta ab eorum semisumma, videlicet $+\frac{1}{2}r$ dat $+\frac{1}{2}r + \sqrt{+\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3} \,\Pi\, \boxed{3}$ I, & $+\frac{1}{2}r - \sqrt{+\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3} \,\Pi\, \boxed{3}$ II; Igitur summa radicum ab his $\boxed{3}$is, sive radix propositæ æquationis est

$$\left. \begin{array}{l} + \sqrt[3]{+\tfrac{1}{2}r + \sqrt{+\tfrac{1}{4}rr - \tfrac{1}{27}q^3}} \\ + \sqrt[3]{+\tfrac{1}{2}r - \sqrt{+\tfrac{1}{4}rr - \tfrac{1}{27}q^3}} \end{array} \right\} \Pi + a.$$

Vel si haberetur $+a^3 - qa + r$.

foret $+a \,\Pi\, + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{+\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}$
$+ \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{+\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}$.

Atque hæc est ipsissima Cardani Regula, cujus mentionem facit Cartesius in sua Geometra, multis anxiè quærentibus hujus extractionis originem, quæ tamen inventu facillima est, ut hîc apparet. Sed neutiquam crediderim genuinum hunc illius inveniendæ modum ipsis innotuisse, alioquin cæteros ejusdem rei faciendæ modos, qui hîc proponuntur, quique ab eadem consideratione dependent, silentio non prætermisissent: nec procul dubio generalem hujus methodi usum, qui se ad extrahendas radices omnium æquationum, per assumptionem aliquot mediarum proportionalium, inter extremas cognitas resolubilium, ut posteà videbimus, extendit, ignorassent.

Priores Methodi ideò sunt eligendæ, quod per illas tantum opus sit inter duas quantitates datas, duas medias proportionales invenire, qui labor per ultimam duplicatur. Ex prima autem methodo patet ratio quomodo hujusmodi æquationes ad puras revocantur.

SCHOLIUM I.

Atque hæc ferè sunt quæ de exprimendo radicum è trimensis æquationibus valore ab authoribus afferuntur; quamquam & illa multò ampliora fecerimus, sed quantùm spectat ad modum exprimendi radices è reliquis trimensis æquationibus, quarum solutio anguli dati æquitrisertione perficitur, quæ quidem pars maxima est, ipsis hæret aqua. Solus Cartesius, quùm post Vietam, atque Albertum Girardum vidisset ex æquatione $+ a^3 - qa - r \; \Pi \; o$ vel $+ a^3 - qa + r \; \Pi \; o$, in quibus $\frac{1}{27} q^3$ F $\frac{1}{4} rr$, radicem æquari subtensæ trientis arcus dati, putavit consultum fore si illa exprimeretur per aliquem caracterem, qui subtensam trientis illius arcus dati denotaret, verbi gratiâ per $s \, \frac{1}{3} \frown$, eodem ferè modo quo radices surdæ peculiari quadam nota significantur. Et hoc certè utilitate suâ non careret si modo nos intra geometriæ limites continere velimus, nam caracter ille geometricum quæsitæ quantitatis valorem satis aptè repræsentaret, qui certè valor nihil aliud est quàm jam nominata subtensa trientis arcus dati. Verùm tale signum ars Analytica meritò rejicit, cùm ejus usus ad numeros, circa quos etiam suum exercet officium, se extendere nequeat. Nullum enim numericum, si modo de numeris sermo sit, quæsitæ quantitatis valorem exhibet, neque quid in Arithmeticis quærendum sit, indicat. Unde tantùm abest ut aliquâ notitiâ mentem nostram imbuat, quin illam reliquit summopere sollicitam ad quodnam numerorum genus quantitas tali modo designata pertineat. Enimverò, quoniam dantur æquationes numericæ, quæ symbolicis omninò similes sunt, aut dicendum est illas radicibus carere in quantùm numericæ sunt, aut earum radices lineam quandam esse, vel certè alio modo quàm per subtensam trientis arcus

dati exprimi non posse; quod certè absurdum est, nam quod arithmeticum est, numeris: quod verò Geometricum magnitudinibus, unumquodque per id quod sibi essentiale est, designari debet. Adde quod hoc signum mera in arithmeticis ignorantiæ nota esset, cùm ejus rei, de qua suscepta est institutio, impossibilem innuat explicationem. Hæc cùm ita se habeant verus & genuinus ejusmodi radices exhibendi modus mihi tradendus esset, sed altioris est speculationis ista inquisitio, quàm ut hoc loco fieri debeat. Interim doctos monere sufficiet radices æquationum, quæ trisectionem anguli pro solutione desiderant, naturam habere planè diversam ab ea, quæ vulgò ipsis tribuitur, mirorque à nullo detectam, quum ipsa mentis oculos aperienti, ultrò se se primo intuitu conspiciendam præbeat; sed, ut ferè sunt hominum ingenia, spretis, aut leviter, & quasi perfunctoriè, festinanterque observatis iis, quæ maximè obvia sunt, ad ardua solùm, & sublimia mentis impetu rapiuntur. Harum tamen æquationum genesim, atque constitutionem breviter exponere non pigebit. Itaque

INVESTIGATIO IV.

De genesi, atque constitutione æquationum, per trisectionem anguli resolubilium.

Ponamus $a - b \sqcap o$, & $a - c \sqcap o$, atque $a + d \sqcap o$. His positionibus inter se multiplicatis oritur

$$\begin{array}{llll} + a^3 & - b\,aa & - bd\,a & + bcd \sqcap o. \\ & - c & - cd & \\ & + d & + bc & \end{array}$$

In qua æquatione si supponatur $+ d \sqcap + b + c$, evanescet terminus ab aa denominatus, & relinquetur

$$\begin{array}{lll} + a^3 & - bd\,a & + bcd \sqcap o. \\ & - cd & \\ & + bc & \end{array}$$

Deinde quoniam ex hypothesi $+ d \sqcap + b + c$, igitur $- bd \sqcap - bb - bc$, & $- cd \sqcap - bc - cc$, atque $+ bcd \sqcap + bbc + bcc$: factisque in æquationis residuo hisce mutationibus habetur

$$\begin{array}{lll} + a^3 & - bb\,a & + bbc \sqcap o. \\ & - bc & + bcc \\ & - cc & \end{array}$$

Itaque si detur $+a^3 - qa + r \,\Pi\, o$ & sit $+\frac{1}{27}q^3$ F $+\frac{1}{4}rr$, enunciabitur a de duobus quantitatibus b, & c, à quibus singulis □ᵃ bb & cc adjecta ▭ sub ipsis efficiunt q. Quod autem fit ab una in □ᵘᵐ reliquæ, auctum ▭ sub ambabus, hoc est $c \times bb + bc$, vel $b \times cc + bc$: vel etiam quod fit ab aggregato ipsarum quantitatum b & c in earum ▭ ducto, hoc est $+b+c \times bc \,\Pi\, +r$.

2° Ponamus $a+b \,\Pi\, o$, & $a+c \,\Pi\, o$, atque $a-d \,\Pi\, o$. His positionibus, ut prius, inter se multiplicatis oritur

$$+a^3 \begin{array}{l}+b\\+c\\-d\end{array} aa \begin{array}{l}+bc\\-bd\\-cd\end{array} a - bcd \,\Pi\, o.$$

Et adhuc facto $+d \,\Pi\, +b+c$, evanescet terminus ab aa denominatus, ac relinquetur

$$+a^3 \begin{array}{l}+bc\\-bd\\-cd\end{array} a - bcd \,\Pi\, o.$$

Deinde quoniam ex hypothesi fit $+d \,\Pi\, +b+c$, igitur $-bd \,\Pi\, -bb-bc$, & $-cd \,\Pi\, -bc-cc$, atque etiam $-bcd \,\Pi\, -bbc-bcc$, & factis in æquationis residuo his mutationibus habetur

$$+a^3 \begin{array}{l}-bb\\-bc\\-cc\end{array} a \begin{array}{l}-bbc\\-dcc\end{array} \Pi\, o.$$

Itaque si detur $+a^3 - qa - r \,\Pi\, o$, & sit $\frac{1}{27}q^3$ F $\frac{1}{4}rr$, enunciabitur a, ut ante de duabus quantitatibus b, & c, à quibus singulis □ᵃ bb, & cc adjuncta ▭° sub ipsis nempe bc efficiunt q. Quod autem fit ab una in □ᵘᵐ reliquæ auctum ▭° sub ipsis hoc est $+b \times cc + bc$, vel $+c \times bb + bc$; vel etiam quod fit ab aggregato dictarum quantitatum b, & c in earum ▭ᵘᵐ ducto videlicet $+b+c \times bc \,\Pi\, +r$.

Vel iisdem quæ prius positis quoniam ex hypothesi fit $+d \,\Pi\, +b+c$, ergo $+d-c \,\Pi\, +b$, ergo etiam $+bc \,\Pi\, +cd-cc$, & $-bd \,\Pi\, -dd+cd$, & adhuc $-bcd \,\Pi\, -cdd+ccd$, & factis in æquationis residuo hisce mutationibus habetur

$$+a^3 \begin{array}{l}-cc\\+cd\\-dd\end{array} a \begin{array}{l}+ccd\\-cdd\end{array} \Pi\, o.$$

Itaque

Itaque si detur $+a^3 - qa - r \, \Pi \, o$ & sit $\frac{1}{27}q^3 \, \mathrm{F} \, \frac{1}{4}r^2$, dicetur a de duabus quantitatibus c, & d, à quibus singulis $\square^a$ $+cc+dd$, multata ▭^{o} sub ipsis, nempe $+cd$ efficiunt q. Quod autem fit à minori quantitate in $\square^{um}$ majoris, multatum ▭^{o} sub ipsis quantitatibus hoc est $+c \times +dd - cd$, vel quod fit à majori quantitate in ▭^{um} sub ambabus, multatum $\square^o$ minoris hoc est $+d \times +cd - cc$, vel etiam quod fit à differentia dictarum quantitatum in earum ▭^{um} ducta hoc est $+d - c \times cd \, \Pi + r$.

THEOREMA.

Æquitrimensum à triente aggregati è binis duarum quantitatum æquibimensis, & è bimenso sub ipsis quantitatibus comprehenso excedit æquibimensum dimidii trimensi, quod fit ab aggregato dictarum quantitatum in earum bimensum multiplicato.

Sunto duæ quantitates b, & c.

Dico $\boxed{3}^{um} \overline{\frac{bb+bc+cc}{3}} \; \mathrm{F} \, \square \, \overline{\frac{bbc+bcc}{2}}$.

Nam $\boxed{3} \, \overline{\frac{bb+bc+cc}{3}} \; \Pi$

$$\frac{+b^6 + 3b^5c + 6b^4c^2 + 7b^3c^3 + 6b^2c^4 + 3bc^5 + c^6}{27},$$

$$\& \; \square \, \overline{\frac{bbc+bcc}{2}} \; \Pi \; \frac{+b^4c^2 + 2b^3c^3 + b^2c^4}{4};$$

& omnibus terminis per 4 deinde per 27 ductis oritur ab una parte $+4b^6 + 12b^5c + 24b^4c^2 + 28b^3c^3 + 24b^2c^4 + 12bc^5 + 4c^6$, ab altera verò $+27b^4c^2 + 54b^3c^3 + 27b^2c^4$, & ablatis utrimque $+24b^4c^2 + 28b^3c^3 + 24b^2c^4$, relinquitur $+4b^6 + 12b^5c + 12bc^5 + 4c^6$, & $+3b^4c^2 + 26b^3c^3 + 3b^2c^4$.

Atqui $4b^6 . 4b^5c :: 4bc^5 . 4c^6$. Ergo $+4b^6 + 4c^6 \; \mathrm{F} \; 4bc^5 + 4b^5c$. Et hunc valorem vero minorem in lo-

cum $4b^6 4c^6$ ſubrogando habetur $+16b^5c$ $+16bc^5$ & $+3b^4c^2$ $+26b^3c^3$ $+3b^2c^4$, vel omnibus terminis per bc diviſis fit $+16b^4$ $+16c^4$, & $+3b^3c$ $+26b^2c^2$ $+3bc^3$.

Sed $b^3c. b^2c^2. bc^3$ ÷, ergo $+bc^3$ $+b^3c$ ⊏ $+2b^2c^2$, & $+13b^3c$ $+13bc^3$ ⊏ $+26b^2c^2$, & hunc valorem vero majorem in locum $+26b^2c^2$ ſubrogando habetur $+16b^4$ $+16c^4$, & $+16b^3c$ $+16bc^3$, vel omnibus terminis per 16 diviſis fit $+b^4$ $+c^4$ & $+b^3c$ $+bc^3$.

Quare cùm ab una parte aliquid ſit detractum, ſubrogando nempe minores quantitates $+4bc^5$ in locum majorum $+4b^6$ $+4c^6$; alteri verò aliquid ſit additum per ſubrogationem majorum quantitatum $+13b^3c$ $+13bc^3$ in locum minoris $+26b^2c^2$, reſtetque poſteà pars imminuta $+b^4$ $+c^4$ major ea parte quæ augmentum recepit, nempe $+b^3c$ $+bc^3$: (nam $b^4. b^3c$ ÷ $bc^3. c^4$, ergo $+b^4$ $+c^4$ ⊏ $+b^3c$ $+bc^3$) patet propoſitionis veritas.

SCHOLIUM II.

Notatu dignum eſt radices æquationum trimenſarum; per meſolabum reſolubilium eſſe quidem ſummam, vel differentiam duarum radicum 3æ poteſtatis, ſed earum tantùm, quarum productum eſt abſolutum, quoniam id ipſum ſemper æquatur coëfficienti penultimi termini quod ſurdo carere debet in æquationibus bene ordinatis.

Unde ſi duæ ſumerentur $\sqrt[3]{}$, quarum productum ſurdum foret, & ex earum ſumma vel differentia æquatio conficeretur, non poſſet illa à ſuo radicali ſigno liberari, quin ſimul ad 9um gradum aſcenderet.

Verbi gratiâ ſumatur $+\sqrt[3]{ccg}$, & $\sqrt[3]{ccd}$ ex quarum ſumma, quæ ſit æqualis $+a$ æquatio conficiatur, ea ſic ſe habebit $+a^3 c\sqrt[3]{cdg}\,a - ccd$ ⊓ o, vel poſito $- ccg$

$+ccd$ $+ccg$ ⊓ $+cck$ fiet $+a^6 - 3c\sqrt[3]{cdg}\,a$

$= cck \, \Pi \, o$, & per metathesim $+ a^3 - cck \, \Pi + 3c\sqrt[3]{cdg} \, a$. Quare

$$+ a^9 - 3cck a^6 + 3c^4k^2a^3 - c^6k^3 \, \Pi + 27 \, c^4dg a^3,$$

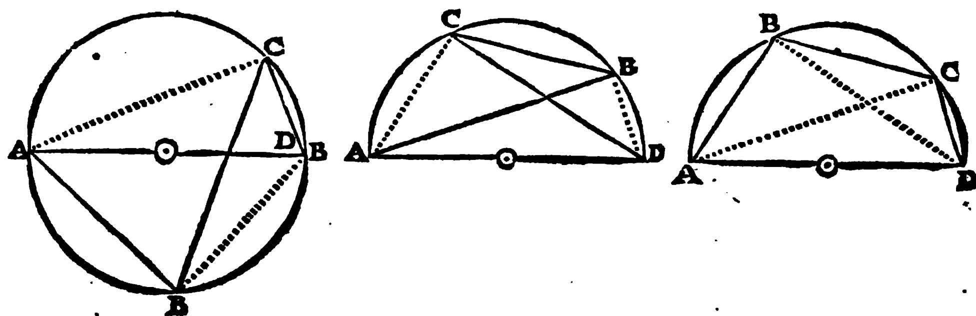
& quia supponi potest $a^3 \, \Pi \, mme$, illaque arbitrabilis litera m infinitas interpretationes admittit, poterimus habere completam æquationem trimensam ex incognita e, quæ 2di termini ablatione in eandem formulam, quàm proposita æquatio incidat. Atque ita, quod jam dixi, æquationes, per assumptionem duarum mediarum proportionalium resolubiles, erunt quidem semper summa, vel differentia duarum $\sqrt[3]{\ }$, quarum productum est absolutum, verùm aliquando radices illæ erunt ab aliis ortæ, quarum productum surdum est, & quarum summa vel differentia æquatur uni ex mediis proportionalibus inter m, & e videlicet $a \, \Pi \, \sqrt[3]{mme}$

ALITER.

De genesi atque constitutione æquationum trimensarum, per anguli trisectionem resolubilium.

PROBLEMA SCHOOTENII.

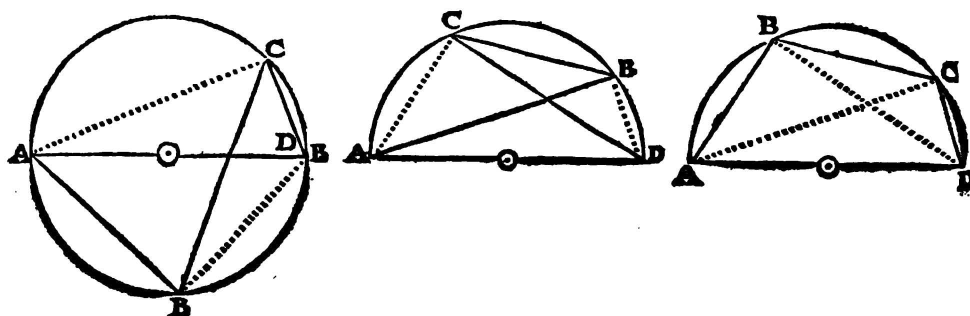
In circulo, cujus diameter AD inscriptis tribus inæqualibus rectis lineis, AB, BC, & CD, sibi invicem contiguis, quarum extrema prodeant ex diametri terminis A & D. Oportet ex datis tribus dictis lineis invenire diametrum AD.



DETERMINATIO CASUUM.

Tres casus hîc considerandi sunt, juxta quos hæ inscriptæ diversimodè in circulo intelligi possunt. 1us quando

rectæ AB, & CD è diametri terminis prodeunt ad diversas partes. 2us quando ipsæ ex iisdem terminis eductæ sunt ad eandem partem, se se mutuò intersecantes. Ultimus autem quando dictæ lineæ non se intersecant. Pro tribus autem istis casibus eadem est demonstratio.



PRÆPARATIO.

AB	Π	b
BC	Π	c
CD	Π	d
AD	Π	y

DEMONSTRATIO.

Ex circuli natura AC Π $\sqrt{yy - dd}$ & BD Π $\sqrt{yy - bb}$, fit verò (*in prima figura*) (= AC × BD Π) $+\sqrt{y^4 \begin{array}{l} - bby^2 \\ - dd \end{array} + b^2d^2}$ (= AB × CD Π) $+ bd$ Π (= AD × BC Π) $+ cy$. Quare $+ cy - bd \;\Pi\; \sqrt{y^4 \begin{array}{l} - bby^2 \\ - dd \end{array} + b^2d^2}$, & consequenter $+ c^2y^2 - 2bcdy + b^2d^2 \;\Pi\; + y^4 \begin{array}{l} - bby^2 \\ - dd \end{array} + b^2d^2$.

Igitur $+ y^3 \begin{array}{l} - bby \\ - cc \\ - dd \end{array} + 2bcd \;\Pi\; o$.

Vel (*ut in 2a fig.*)(= AC × BD Π) $+\sqrt{y^4 \begin{array}{l} - bby^2 \\ - dd \end{array} + b^2d^2}$ $+$ (= AD × CB Π) cy Π (= AB × CD Π) $+ bd$.

Ergo $+ bd - cy \;\Pi\; \sqrt{y^4 \begin{array}{l} - bby^2 \\ - dd \end{array} + b^2d^2}$. Ergo

$$+ b^2d^2 - 2bcdy + c^2y^2 \Pi + y^4 \begin{array}{l} - bby^2 \\ - dd \end{array} + b^2d^2.$$

Igitur $+ y^3 \begin{array}{l} - bby \\ - cc \\ - dd \end{array} + 2bcd \Pi o.$

Vel tandem (*ut in tertia figura*) ($\square$ AC $\times$ BD Π)
$+ \sqrt{y^4 \begin{array}{l} - bbyy \\ - dd \end{array} + b^2d^2} \;\Pi$ ($+ \square$ AB $\times$ CD Π) $+ bd$
($+ \square$ BC $\times$ AD Π) $+ cy$, & utramque partem $\square^{do}$,
fit $+ y^4 \begin{array}{l} - bbyy \\ - dd \end{array} + b^2d^2 \Pi + b^2d^2 + 2bcdy + c^2y^2$,

Igitur $+ y^3 \begin{array}{l} - bby \\ - cc \\ - dd \end{array} - 2bcd \Pi o.$

E duobus problematibus à Schootenio propositis unum confeci, & breviſſimam demonſtrationem concinnavi. Quomodo autem in æquatione, quæ ex hoc problemate deducitur, æquitrimenſum trientis quantitatis cognitæ penultimi termini ſuperet æquibimenſum ab ultimi dimidio, id optimè idem Schootenius demonſtravit in Appendice ad æquationes cubicas.

Atque hæc eſt ſecunda geneſis, atque conſtitutio trimenſarum æquationum, per anguli triſectionem reſolubilium.



CAPUT IV.

De solutione quadrimensarum Æquationum per earum depressionem ad tertium gradum.

POstquam exploratum est propositam æquationem quatuor dimensiones habentem dividi non posse per aliquem è factoribus ultimi termini, ea reducatur ad tertium gradum per sequentes regulas.

REGULA I^a HUDDENII.

Propositâ qualibet æquatione quadrimensâ, & completâ, nempe $a^4.pa^3.qa^2.ra.s\,\Pi\,o$, quærendus est valor hujus æquationis

$$\begin{array}{llll}+y^3 & -qyy & -4sy & -pps \\ & +pr & +4qs & \\ & & -rr & \end{array}\ \Pi\ o$$

Et habebitur

$$+aa\ \left.\begin{array}{l}+\frac{1}{2}p\\ +\sqrt{\frac{1}{4}pp-q+y}\end{array}\right\}a+\frac{1}{2}y\ \ \frac{+\frac{1}{2}py-r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp-q+y}}\ \ \Pi\ o.$$

$$\text{Et}\ +aa\ \left.\begin{array}{l}+\frac{1}{2}p\\ -\sqrt{\frac{1}{4}pp-q+y}\end{array}\right\}a+\frac{1}{2}y\ \ \frac{-\frac{1}{2}p+r}{2\sqrt{\frac{1}{4}pp-q+y}}\ \ \Pi\ o.$$

EXEMPLUM IN NUMERIS.

Esto $\begin{array}{lllll}+a^4 & -2a^3 & -3a^3 & -2a & -1\,\Pi\,o\\ & -p & -q & -r & -s\end{array}$, Per hanc regulam fit $\begin{array}{llll}+y^3 & +3yy & +4y & +4\,\Pi\,o\\ & & +4 & +12 \\ & & & -4\end{array}$. Idest $+y^3+3y^2+8y+12\,\Pi\,o$, & fit $+y\,\Pi\,-2$, quod arguit propositam

æquationem è duabus bimensis æquationibus compositam esse, nam sicut regula præcipit operando habetur $+aa - 1a - 1 + \sqrt{2}|$ $\sqcap o$, atque $+aa - 1a - 1 - \sqrt{2}|$
$+\sqrt{2}|$ $\qquad$ $+\sqrt{2}|$
$\sqrt{2}|$ $\sqcap o$, quæ duæ æquationes inter se multiplicatæ propositam æquationem $+a^4 - 2a^3 - 3aa - 2a - 1$ $\sqcap o$ producunt.

REGULA II^a VIETÆ ET CARTESII.

Propositâ qualibet æquatione quadrimensâ, secundo termino carente, nimirum $+a^4. qa^2. ra. s \sqcap o$, quærendus est valor hujus æquationis $+y^3 + 2qy^2 + qqy$
$\qquad - 4s$
$- rr \sqcap o$, & habebitur $+a^2 + \sqrt{y}\,|\,a + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}y \dfrac{-r}{+2\sqrt{y}|} \sqcap o$.

Atque $+a^2 - \sqrt{y}|\,a + \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}y \dfrac{+r}{+2\sqrt{y}|} \sqcap o$.

EXEMPLUM IN NUMERIS.

Esto $+a^4 - 1a^2 - 2a - 1 \sqcap o$. Per hanc Re-
$\qquad -q \quad -r \quad -s$
gulam fit $+y^3 - 2y^2 + 1y - 4 \sqcap o$. Id est $+y^3$
$\qquad + 4$
$- 2y^2 + 5y - 4 \sqcap o$, estque $+y \sqcap + 1$, quod arguit propositam æquationem è duabus bimensis æquationibus compositam esse, nam sicut regula præcipit operando habetur
$+aa + 1a + 1 \sqcap o$, & $+aa - 1a - 1 \sqcap o$ quæ duæ æquationes inter se multiplicatæ propositam æquationem $+a^4 - 2a^2 - 2a - 1 \sqcap o$ restituunt.



REGULA III^a VIETÆ.

Propositâ qualibet æquatione quadrimensâ, secundo termino carente, nimirum $+ a^4 . q a^2 . r a . s \, \Pi \, o$, quærendus est valor hujus æquationis $+ y^3 - q y^2 - 4 s y + 4 q s \, \Pi \, o$, & habebitur

$$\begin{array}{l} -rr \\ + aa + \sqrt{y-q}\,|\, a + \tfrac{1}{2} y \quad \dfrac{-r}{+2\sqrt{y-q}\,|}\,|\; \Pi \, o. \end{array}$$

$$\text{Et } + aa - \sqrt{y-q}\,|\, a + \tfrac{1}{2} y \quad \dfrac{+r}{+2\sqrt{y-q}\,|}\,|\; \Pi \, o.$$

EXEMPLUM IN NUMERIS.

Esto $+ a^4 + 1 a^2 - 4 a - 3 \, \Pi \, o$. Per hanc regulam
$+q \quad -r \quad -s$
fit $+ y^3 - 1 y^2 + 12 y - 28 \, \Pi \, o$, estque $+ y \, \Pi + 2$, quod arguit propositam æquationem è duabus bimensis æquationibus compositam esse, nam sicut regula præcipit operando habetur $+ aa + 1a + 3 \, \Pi \, o$, & $+ aa - 1a - 1 \, \Pi \, o$, quæ duæ æquationes invicem multiplicatæ propositam æquationem $+ a^4 + 1 a^2 - 4 a - 3 \, \Pi \, o$ restituunt.

REGULA IV^a VIETÆ.

Propositâ quâlibet æquatione quadrimensâ, secundo, & tertio termino carente, videlicet $+ a^4 . r a . s \, \Pi \, o$, quærendus est valor hujus æquationis $+ y^3 - 4 s y - r r \, \Pi \, o$, & habebitur

$$+ aa + \sqrt{y}\,|\, a + \frac{1}{2} y \quad \frac{-r}{+2\sqrt{y}\,|} \; \Pi \, o,$$

$$\text{Atque } + aa - \sqrt{y}\,|\, a + \frac{1}{2} y \quad \frac{+r}{+2\sqrt{y}\,|} \; \Pi \, o.$$

EXEMPLUM

EXEMPLUM IN NUMERIS.

Esto $+a^4 - 3a - 2 \propto o$. Per hanc regulam fit $+$
$\quad - r \quad - s$
$y^3 + 8y - 9 \propto o$, estque $+y \propto +1$, quod arguit propositam æquationem è duabus bimensis æquationibus compositam esse, nam sicut regula præcipit operando habetur
$+aa + 1a + 2 \propto o$, & $+aa - 1a - 1 \propto o$, quæ duæ æquationes invicem multiplicatæ propositam æquationem $+a^4 - 3a - 2 \propto o$ restituunt.

REGULA V. VIETÆ.

Propositâ quâlibet æquatione quadrimensâ, tertio, & quarto termino carente, nimirum $+a^4.\ pa^3.\ s \propto o$, quærendus est valor hujus æquationis $+y^3 - 4sy + spp \propto o$, & habebitur

$$+aa \left.\begin{matrix} +\frac{1}{2}p \\ +\sqrt{\frac{1}{4}pp - y} \end{matrix}\right\} a - \frac{1}{2}y \; \frac{-\frac{1}{2}py}{+2\sqrt{\frac{1}{4}pp - y}} \propto o.$$

$$\text{Et } +aa \left.\begin{matrix} +\frac{1}{2}p \\ -\sqrt{\frac{1}{4}pp - y} \end{matrix}\right\} a - \frac{1}{2}y \; \frac{+\frac{1}{2}py}{+2\sqrt{\frac{1}{4}pp - y}} \propto o.$$

EXEMPLUM IN NUMERIS.

Esto $+a^4 + 3a^3 - 8 \propto o$. Per hanc regulam fit $+y^3$
$\quad +p \quad -s$
$+ 32y - 72 \propto o$, estque $y \propto +2$, quod arguit propositam æquationem è duabus bimensis æquationibus compositam esse, nam sicut regula præcipit operando habetur $+aa + 2a - 4 \propto o$, & $+a^2 + 1a + 2 \propto o$, quę duæ æquationes invicem multiplicatæ propositam æquationem $+a^4 + 3a^3 - 8$ restituunt.

Ee

REGULA VI^a AUTHORIS.

Propositâ quâlibet æquatione quadrimensâ, tertio termino carente, nimirum $+a^4.pa^3.ra.s\,\Pi\,o$, quærendus est valor hujus æquationis, $+y^3 - 4sy + spp\,\Pi\,o$, & $+pr - rr$ bebitur

$$+aa \left.\begin{matrix} +\tfrac{1}{2}p \\ +\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - y} \end{matrix}\right\} a - \tfrac{1}{2}y \; \frac{-\tfrac{1}{2}py - r}{+2\sqrt{+\tfrac{1}{4}pp - y}} \; \Pi\,o.$$

$$\text{Et} + aa \left.\begin{matrix} +\tfrac{1}{2}p \\ +\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - y} \end{matrix}\right\} a - \tfrac{1}{2}y \; \frac{+\tfrac{1}{2}py + r}{+2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - y}} \; \Pi\,o.$$

EXEMPLUM IN NUMERIS.

Esto $+a^4 - 1a^3 - 13a - 15\,\Pi\,o.$ Per hanc regulam fit $-p \; -r \; -s$

$+y^3 + 73y + 154\,\Pi\,o$, estque $+y\,\Pi - 2$, quod arguit propositam æquationem è duabus bimensis æquationibus compositam esse, nam sicut regula præcipit operando habetur $+aa + 1a + 5\,\Pi\,o$, & $+aa - 2a - 3\,\Pi\,o$, quæ duæ æquationes invicem multiplicatæ propositam equationem $+a^4 - 1a^3 - 13a - 15\,\Pi\,o$ restituunt.

REGULA VII^a AUTHORIS.

Propositâ quâlibet æquatione quadrimensâ, quarto termino carente, nimirum $+a^4.\,pa^3.\,qa^2.\,s\,\Pi\,o$, quærendus est valor hujus æquationis $+y^3 + qyy - 4sy + spp$ $-4qs$ $\Pi\,o$, & habebitur

$$+aa \left.\begin{matrix} +\tfrac{1}{2}p \\ +\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q - y} \end{matrix}\right\} a - \tfrac{1}{2}y \; \frac{-\tfrac{1}{2}py}{+2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q - y}} \; \Pi\,o$$

$$\text{Et} + aa \left.\begin{matrix} +\tfrac{1}{2}p \\ +\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q - y} \end{matrix}\right\} a - \tfrac{1}{2}y \; \frac{+\tfrac{1}{2}py}{+2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp = q - y}} \; \Pi\,o$$

EXEMPLUM IN NUMERIS.

Esto $+a^4 - 3a^3 - 1a^2 - 18 \,\Pi\, o$. Per hanc regulam fit $+y^3 - 1yy + 72y - 234 \,\Pi\, o$, estque $+y \,\Pi\, +3$, quod arguit propositam æquationem è duabus bimensis æquationibus compositam esse, nam juxta regulæ præceptum operando habetur
$+a^2 - 1a + 3 \,\Pi\, o$, & $+a^2 - 2a - 6 \,\Pi\, o$, quæ duæ æquationes inter se multiplicatæ propositam æquationem $+a^4 - 3a^3 - 1a^2 - 18 \,\Pi\, o$ restituunt.

REGULA VIII^a, ET ULTIMA AUTHORIS.

Propositâ quâlibet æquatione quadrimensâ, secundo termino carente, nimirum $+a^4 . qa^2 . ra . s \,\Pi\, o$, quærendus est valor hujus æquationis $+y^3 \left.\begin{matrix} +\frac{qq}{+2r} \\ \frac{-2s}{+r} \end{matrix}\right\} yy - \frac{1}{2}qy + \frac{1}{8}r \,\Pi\, o$.

EXEMPLUM IN NUMERIS.

Esto ut in 2^a regula $\underset{}{+a^4}\ \underset{-q}{-1a^2}\ \underset{-r}{-2a}\ \underset{-s}{-1} \,\Pi\, o$. Per hanc regulam fit $+y^3 - \frac{1}{4}yy + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4} \,\Pi\, o$, vel facto $\frac{e}{4} \,\Pi\, y$ oritur $+e^3 - 5e^2 + 8e - 16 \,\Pi\, o$, & fit $+e \,\Pi\, +4$, & consequenter $+y \,\Pi\, +1$, quod arguit propositam æquationem $+a^4 - 1a^2 - 2a - 1 \,\Pi\, o$ è duabus bimensis æquationibus compositam esse.

Primis quinque Regulis, ab Authoribus, quos nominavi, inventis duas sequentes addere placuit, ut quælibet æquatio quadrimensa, quocumque tandem modo sese habeat, statim, & absque ulla præparatione ad tertium gradum deprimi possit. Omnes autem hæ Regulæ, si ultimam excipias, ab eodem inventionis fonte profi-

ciſcuntur. At ultima paulò reconditioris eſt originis, & in ea de induſtria omiſi quomodo cognita y poſſit haberi incognita ęquationis propoſitæ quantitas a, ut habeant artis periti in quo ſe exerceant, ſi fortè in hac inveſtigatione aliquam operam impendere velint.

Nolo harum regularum cenſuram addere, alius enim erit eas examinandi locus: ſolùm adjungam unamquamlibet, adhibitâ priùs decenti præparatione infinitis modis ſolvi poſſe per eandem methodum. Verbi gratiâ

Propoſitâ quâlibet æquatione quadrimensâ, & completâ, nimirum $+a^4.\ pa^3.\ qa^2.\ ra.\ s \,\Pi\, o$, quærendus eſt valor hujus æquationis

$$\begin{array}{llll} +y^3 & +3my^2 & +3mmy & +m^3 \;\Pi\; o, \text{ \& habebitur} \\ & +q & -2qm & -qm^2 \\ & & -4s & -4sm \\ & & +pr & +prm \\ & & & -pps \\ & & & +4qs \\ & & & -rr \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} +aa \qquad\qquad +\tfrac{1}{2}p \\ \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}pp+m-q+y} \end{array}\right\} a + \tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}y \;\frac{+\tfrac{1}{2}py + \tfrac{1}{2}pm - r}{+2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp+m-q+y}} \;\Pi\; o$$

Atque
$$\left.\begin{array}{l} +aa \qquad\qquad +\tfrac{1}{2}p \\ -\sqrt{\tfrac{1}{4}pp+m-q+y} \end{array}\right\} a + \tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}y \;\frac{-\tfrac{1}{2}py - \tfrac{1}{2}pm + r}{+2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp+m-q+y}} \;\Pi$$

In quibus æquationibus litera m ad arbitrium limitabilis eſt, ſive pro litera m ſumi poteſt quævis quantitas ad libitum, & conſequenter modus habetur has æquationes infinitis modis ſolvendi. Idem ferto judicium de aliis Regulis, quæ ſic per eandem methodum conſtrui poſſunt, ut etiam infinitæ viæ pateant ad eas reſolvendas.

EXEMPLUM IN NUMERIS.

Proponatur $+a^4 + 1a^3 - 9a^2 + 1a + 2 \,\Pi\, o$, & ſit $+m \,\Pi + 1$, per traditam methodum ſit

$$\begin{array}{llll} +y^3 & +3y^2 & +3y & +1 \,\Pi\, o. \\ & +9 & +18 & +9 \\ & & -8 & -8 \\ & & +1 & +1 \\ & & & -2 \\ & & & -72 \\ & & & -1 \end{array}$$

Idest $y^3 + 12y^2 + 14y - 72 \,\Pi\, o$,

& fit $+y \,\Pi\, -4$, quod arguit propositam æquationem è duabus bimensis æquationibus compositam esse, nam juxta methodi præceptum operando habebitur

$$+aa \left.\begin{matrix} +\frac{1}{2} \\ +\sqrt{\frac{1}{4}+1+9-4} \end{matrix}\right\} a + \frac{1}{2} - 2 \quad \frac{-2+\frac{1}{2}-1}{+2\sqrt{\frac{1}{4}+1+9-4}} \,\Pi\, o$$

Idest $+aa + 3a - 2 \,\Pi\, o$, & $+aa - 2a - 1 \,\Pi\, o$, quæ duæ æquationes inter se multiplicatæ propositam æquationem $+a^4 + 1a^3 - 9a^2 + 1a + 2 \,\Pi\, o$ efficiunt.

Ponatur jam $+m \,\Pi\, +2$. Per traditam methodum fit

$$\begin{array}{llll} +y^3 & +6y^2 & +12y & +8 \,\Pi\, o, \\ & +9 & +36 & +36 \\ & & -8 & -16 \\ & & +1 & +2 \\ & & & -2 \\ & & & -72 \\ & & & -1 \end{array}$$

Idest $+y^3 + 15y^2 + 41y - 45 \,\Pi\, o$, & fit $+y \,\Pi\, -5$, quod, ut priùs, arguit propositam æquationem è duabus bimensis æquationibus compositam esse, nam juxta methodi præceptum operando habebitur

$$+aa \left.\begin{matrix} +\frac{1}{2} \\ +\sqrt{\frac{1}{4}+2+9-5} \end{matrix}\right\} a - \frac{1}{2} + 1 \quad \frac{-\frac{1}{2}+1-1}{+2\sqrt{\frac{1}{4}+2+9-5}} \,\Pi\, o$$

Idest $+a^2 + 3a - 2 \,\Pi\, o$, & $+a^2 - 2a - 1 \,\Pi\, o$, ut priùs.

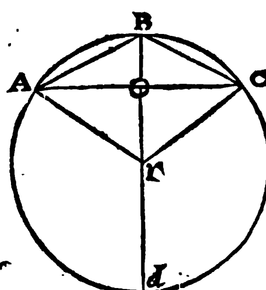


CAPUT V.

De natura æquationum plures quàm quatuor dimensiones habentium, & de illarum solutione.

HUjus capitis initio, quamvis locus esset, generalem æquationum supra quartum gradum evectarum constitutionem exponere non fert animus, neque enim hîc omnia dicere decrevi, sed earum tantummodo æquationum naturam evolvam, quæ tam per mesolabum, quàm per anguli dati in aliquot partes æquales sectionem resolubiles sunt. Itaque

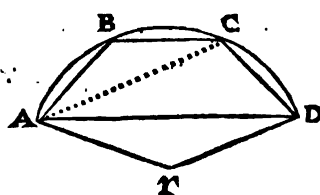
PRIMA METHODUS UNIVERSALIS SIMPLICISSIMAS ANGULARIUM SECTIONUM ÆQUATIONES INVENIENDI.



A B vel B $c \,\Pi\, a$
A r vel B $r \,\Pi\, r$
A $c \,\Pi\, c$

ANALYSIS 1ª

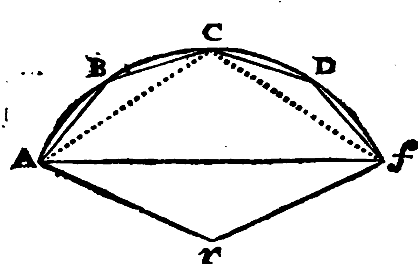
(▭ d B o Π) $2r \times$ B o Π (□ A B Π) aa, Ergo $\frac{a^2}{2r}$ Π B o, & $\frac{a^4}{4rr}$ Π □ B o, Ergo $+ aa - \frac{a^4}{4rr}$ Π (□ A o Π) $+ \frac{1}{4} cc$. Quare $+ a^4 - 4r^2a^2 + r^2c^2 \,\Pi\, o$. Æquatio pro bisectione anguli.



A D Π d

ANALYSIS 2ª

Ex probatis (□ A c Π) $+ \frac{4r^2a^2 - a^4}{rr}$ Π (□ A B $+$ ▭ A D × B c Π) $+ aa + ad$. Ergo $+ a^3 - 3r.a + rrd \,\Pi\, o$. Æquatio pro trisectione anguli.



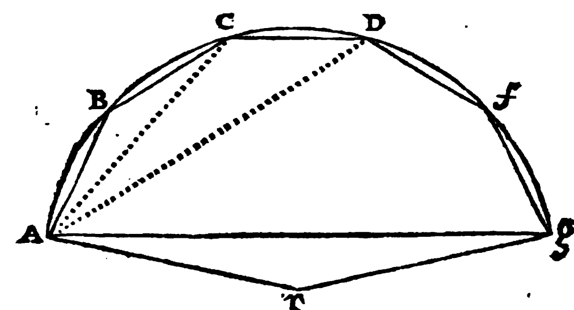
$A f \sqcap f|$

ANALYSIS 3^a

Per primam analysim habetur

$$\frac{(4rr \times \square AC - \boxed{4} AC \sqcap)}{rr} + \frac{16r^2a^2 - 4a^4}{rr} - \frac{16r^4a^4 + 8r^2a^6 - a^8}{r^6} \sqcap (\square Af \sqcap) f^2.$$ Igitur

$+ a^8 - 8r^2a^6 + 20r^4a^4 - 16r^6a^2 + r^6f^2 \sqcap 0.$ Æquatio pro sectione anguli in in quatuor partes æquales.



$A g \sqcap g|$

ANALYSIS 4^a

Per 2^am analysim $\frac{+3rra - a^3}{rr} \sqcap AD.$ Ergo

$$\frac{+9r^4a^2 - 6r^2a^4 + a^6}{r^4} \sqcap (\square AD \sqcap \square Ac + \square CD \times Ag \sqcap) \frac{+4r^2a^2 - a^4}{rr} + ag$$ Ergo $+ a^5 - 5r^2a^3 + 5r^4a - r^4g \sqcap 0.$ Æquatio pro sectione anguli in quinque partes æquales.

ANALYSIS 5ª.

Per Analy. 3am ($\square Af \Pi$) $\frac{+16r^6a^2-20r^4a^4+8r^2a^6-a^8}{r^6} \Pi$ ($\square AD + \square Df \times AK \Pi$) $\frac{+9r^4a^2-6r^2a^4+a^6}{r^4}+ka$. Ergo $+a^7-7r^2a^6+14r^4a^3-7r^6a^2+r^6 k \Pi o$. Æquatio pro sectione anguli in septem partes æquales.

Atque sic in infinitum progredi licet ad simplicissimas reliquarum angularium sectionum æquationes inveniendas.

SECUNDA METHODUS UNIVERSALIS INVENIENDI ÆQUATIONES IN QUIBUSCUMQUE GRADIBUS PER MESOLABUM, SIVE PER ASSUMPTIONEM ALIQUOT MEDIARUM PROPORTIONALIUM INTER EXTREMAS COGNITAS RESOLUBILES.

IN IIIº GRADU.

Esto 1º $+a \Pi +m+n$, & utramque partem $\boxed{3}$do fit $+a^3 \Pi +m^3+n^3 (+3m^2n+3mn^2 \Pi) +3mn \times (+m+n \Pi) +a$. Ergo $+a^3-3mna \begin{matrix}-m^3\\-n^3\end{matrix} \Pi o$.

Quare si sit $+a^3-qa-r \Pi o$, erit $+a$ summa duarum quantitatum $+m +n$, quarum productum $mn \Pi \frac{1}{3}q$; summa verò æquitrimensorum ab ipsis nempe $+m^3+n^3 \Pi +r$.

Esto 2º $+a \Pi +m-n$, & utramque partem $\boxed{3}$do fit

$+a^3$

$= +a^3 \Pi + m^3 - n^3 (-3m^2n + 3mn^2 \Pi) + 3mn \times (-m + n \Pi) - a$, ergo $+a^3 + 3mna - m^3 \Pi o$.
$+n^3$

Quare si sit $+a^3 + qa - r \Pi o$, erit a differentia duarum quantitatum $+m - n$, quarum productum $mn \Pi \frac{1}{3} q$, differentia verò æquitrimensorum ab ipsis nempe $+m^3 - n^3 \Pi + r$.

Exemplum 1um in Numeris.

Esto $+a^3 - 6a - 6 \Pi o$ fit $a \Pi + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$, quarum productum est $\frac{6}{3} \Pi 2$; summa verò æquitrimensorum ab ipsis est 6.

Exemplum 2um in Numeris.

Esto $+a^3 + 6a - 2 \Pi o$. fit $a \Pi \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$, quarum productum est $\frac{6}{3} \Pi 2$ ut priùs, differentia verò æquitrimensorum ab ipsis est 2.

In IV. gradu.

Esto $+a \Pi + m + n$, & utramque partem $\boxed{4}$do fit $+a^4 \Pi + m^4 + n^4 + 6m^2n^2 (+4m^3n + 4mn^3 \Pi) + 4mn \times (+m^2 + n^2 \Pi) + a^2 - 2mn$. (Nam $+aa \Pi + m^2 + n^2 + 2mn$), Ergo $+a^4 - 4mna^2 - m^4 \Pi o$.
$-n^4$
$+2m^2n^2$

Sed hujusmodi æquationes, in gradibus per pares numeros designatis consistentes, ad inferiores gradus, quos parium medietates connotant, devolvuntur. Quocirca illas ad hos descendentes gradus, ad quos pertinent, remittimus.

In V. gradu.

Esto $+a \Pi + m + n$, & utramque partem [illegible]do fit

$+a^5 \sqcap +m^5 +n^5 \; (+5m^4n +5mn^4 \sqcap) +5mn \times (+m^3 +n^3 \sqcap) +a^3 - 5mna(+10m^3n^2 +10m^2n^3 \sqcap) +10m^2n^2 \times (+m +n \sqcap) +a$. Igitur $+a^5 -5mna^3 +5m^2n^2a -m^5 -n^5 \sqcap o$.

Quare si sit $+a^5 - qa^3 + sa - t \sqcap o$, erit a summa duarum quantitatum $+m +n$, quarum productum est $\frac{1}{5}q$, summa verò æquiquinquimensorum ab ipsis nempe $+m^5 +n^5 \sqcap +t$.

Esto deinde $+a \sqcap +m -n$, & utramque partem $\boxed{5}^{do}$ fit $+a^5 \sqcap +m^5 -n^5 \; (-5m^4n +5mn^4 \sqcap) +5mn \times (-m^3 +n^3 \sqcap) -a^3 -5mna \; (+10m^3n^2 -10m^2n^3 \sqcap) +10m^2n^2 \times (+m -n \sqcap) +a$. Ergo $+a^5 +5mna^3 +5m^2n^2a -m^5 +n^5 \sqcap o$.

Quare si sit $+a^5 +qa^3 +sa -t \sqcap o$, erit a differentia duarum quantitatum $+m -n$, quarum productum $mn \sqcap \frac{1}{5}q$; differentia verò æquiquinquimensorum ab ipsis videlicet $+m^5 -n^5 \sqcap +t$.

EXEMPLUM I^um IN NUMERIS.

Esto $+a^5 -10a^3 +20a -18 \sqcap o$, fit $a \sqcap +\sqrt[5]{16} + \sqrt[5]{2}$; quarum productum videlicet $\sqrt[5]{32} \sqcap 2$, summa verò æquiquinquimensorum ab ipsis nempe $+m^5 +n^5 \sqcap +18$.

EXEMPLUM 2um IN NUMERIS.

Esto $+a^5 +10a^3 +20a -4 \sqcap o$, fit $a \sqcap \sqrt[5]{8} - \sqrt[5]{4}$ quarum productum nempe $\sqrt[5]{32} \sqcap \frac{10}{5}$ sive 2, ut priùs; differentia verò æquiquinquimensorum ab ipsis, videlicet $+m^5 -n^5 \sqcap +4$.

IN VII. GRADU.

Esto $+a \sqcap +m +n$, & utramque partem $\boxed{7}^{do}$ fit $+a^7 \sqcap +m^7 +n^7 \; (+7m^6n +7mn^6 \sqcap) +7mn \times (+m^5 +n^5 \sqcap) +a^5 -5mna^3 +5m^2n^2a(+21m^5n^2 +21m^2n^5 \sqcap)$

$+ 21 m^2 n^2 \times (+ m^3 + n^3 \Pi) + a^3 - 3mna\ (+ 35m^4 n^3$ $+ 35 m^3 n^4) + 35 m^3 n^3 \times (+ m + n \Pi) + a$. Ergo $+ a^7$ $- 7mna^5 + 14m^2 n^2 a^3 - 7m^3 n^3 a - m^7 \Pi o$.
$- n^7$

Quare si sit $+ a^7 - qa^5 + fa^3 - xa - z \Pi o$, erit a summa duarum quantitatum $+ m + n$, quarum productum nempe $mn \Pi \frac{1}{7} q$, summa verò æquiseptimensorum ab ipsis videlicet $+ m^7 + n^7 \Pi + z$.

Esto deinde $+ a \Pi + m - n$, & utramque partem $\lfloor 7 \rfloor$ do fit $+ a^7 \Pi + m^7 - n^7\ (- 7m^6 n + 7mn^6 \Pi)$ $+ 7mn \times (- m^5 + n^5 \Pi) - a^5 - 5mna^3 - 5m^2 n^2 a\ (+ 21$ $m^5 n^2 - 21 m^2 n^5 \Pi) + 21 m^2 n^2 \times (+ m^3 - n^3 \Pi) + a^3$ $+ 3mna\ (- 35m^4 n^3 + 35m^3 n^4 \Pi) + 35m^3 n^3 \times (- m$ $+ n \Pi) - a$. Ergo $+ a^7 + 7mna^5 + 14m^2 n^2 a^3$ $+ 7m^3 n^3 a - m^7 \Pi o$.
$+ n^7$

Quare si sit $+ a^7 + qa^5 + fa^3 + xa - z \Pi o$, erit a differentia duarum quantitatum $+ m - n$, quarum productum, nempe $mn \Pi \frac{1}{7} q$, differentia verò æquiseptimensorum ab ipsis, videlicet $+ m^7 - n^7 \Pi + z$.

EXEMPLUM I^um IN NUMERIS.

Esto $+ a^7 - 14a^5 + 56a^3 - 56a - 66 \Pi o$, fit $a \Pi$ $\sqrt[7]{64} + \sqrt[7]{2}$, quarum productum est $\sqrt[7]{128} \Pi \left(\frac{14}{7}\right) \Pi 2$; summa verò æquiseptimensorum ab ipsis est 66.

EXEMPLUM 2um IN NUMERIS.

Esto $+ a^7 + 14a^5 + 56a^3 + 56a - 62 \Pi o$, fit $a \Pi$ $\sqrt[7]{64} - \sqrt[7]{2}$ quarum productum est 2 ut priùs, differentia verò æquiseptimensorum ab ipsis est 62.



IN IX. GRADU.

Esto $+a \Pi +m +n$, & utramque partem $\boxed{9}^{do}$ fit $+a^9 \Pi +m^9 +n^9 (+9m^8n +9mn^8 \Pi) +9mn \times (+m^7 +n^7 \Pi)$. $+a^7 - 7mna^5 + 14m^2n^2a^3 - 7m^3n^3a$ $(+36m^7n^2 +36m^2n^7 \Pi) +36m^2n^2 \times (+m^5 +n^5 \Pi) +a^5 -5mna^3 +5m^2n^2a$ $(+84m^6n^3 +84m^3n^6 \Pi) +84m^3n^3 \times (m^3 +n^3 \Pi) +a^3 -3mna$ $(+126m^5n^4 +126m^4n^5 \Pi) +126m^4n^4 \times (+m +n \Pi) +a$. Ergo $+a^9 -9mna^7 +27m^2n^2a^5 -30m^3n^3a^3 +9m^4n^4a \begin{matrix} -m^9 \\ -n^9 \end{matrix} \Pi o$.

Quare si sit $+a^9 -qa^7 +fa^5 -xa^3 +ca -d \Pi o$: Erit a summa duarum quantitatum $+m +n$, quarum productum nempe $+mn \Pi +\frac{1}{9}q$, summa verò æquinonimensorum ab ipsis, videlicet $+m^9 +n^9 \Pi +d$.

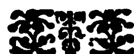
Esto deinde $+a \Pi +m -n$, & utramque partem $\boxed{9}^{do}$ fit $+a^9 \Pi +m^9 -n^9 (-9m^8n +9mn^8 \Pi) +9mn \times (-m^7 +n^7 \Pi) -a^7 - 7mna^5 - 14m^2n^2a^3 -7m^3n^3a$ $(+36m^7n^2 -36m^2n^7 \Pi) +36m^2n^2 \times (+m^5 -n^5 \Pi) +a^5 -5mna^3 +5m^2n^2a$ $(-84m^6n^3 +84m^3n^6 \Pi) +84m^3n^3 \times (-m^3 +n^3 \Pi) -a^3 -3mna$ $(+126m^5n^4 -126m^4n^5 \Pi) +126m^4n^4 \times (+m -n \Pi) +a$. Ergo $+a^9 +9mna^7 +27m^2n^2a^5 +30m^3n^3a^3 +9m^4n^4a \begin{matrix} -m^9 \\ +n^9 \end{matrix} \Pi o$.

Quare si sit $+a^9 +qa^7 +fa^5 +xa^3 +ca -d \Pi o$: Erit a differentia duarum quantitatum $m+n$, quarum productum $mn \Pi \frac{1}{9}q$; differentia verò æquinonimensorum ab ipsis, nempe $+m^9 -n^9 \Pi +d$.

EXEMPLUM I^um IN NUMERIS.

Esto $+a^9 -18a^7 +108a^5 -240a^3 +144a -48 \Pi o$.

Fit $a \Pi \sqrt[9]{32} + \sqrt[9]{16}$, quarum productum $\sqrt[9]{512} \Pi 2$, summa verò æquinonimensorum ab ipsis est $+48$.



EXEMPLUM 2um IN NUMERIS.

Esto $+a^9 + 18a^7 + 108a^5 + 240a^3 + 144a - 16 \,\Pi\, o$. Fit $a \,\Pi\, \sqrt[9]{32} - \sqrt[9]{16}$, quarum productum $\sqrt[9]{512} \,\Pi\, 2$, ut priùs; differentia verò æquinonimensorum ab ipsis est $+16$.

IN XI. GRADU.

Esto $+a \,\Pi\, +m + n$, & utramque partem $|\overline{\underline{11}}|^{do}$ fit $+a^{11} \,\Pi\, +m^{11} + n^{11}\, (+11m^{10}n + 11mn^{10} \,\Pi) + 11mn \times (+m^9 + n^9 \,\Pi) + a^9 - 9mna^7 + 27m^2n^2a^5 - 30m^3n^3a^3 + 9m^4n^4a\, (+55m^9n^2 + 55m^2n^9 \,\Pi) + 55m^2n^2 \times (+m^7 + n^7 \,\Pi) + a^7 - 7mna^5 + 14m^2n^2a^3 - 7m^3n^3a\, (+165m^8n^3 + 165m^3n^8 \,\Pi) + 165m^3n^3 \times (+m^5 + n^5 \,\Pi) + a^5 - 5mna^3 + 5m^2n^2a\, (+330m^7n^4 + 330m^4n^7 \,\Pi) + 330m^4n^4 \times (+m^3 + n^3 \,\Pi) + a^3 - 3mna\, (+462m^6n^5 + 462m^5n^6 \,\Pi) + 462m^5n^5 \times (+m + n \,\Pi) + a$. Ergo $+a^{11} - 11mna^9 + 44m^2n^2a^7 - 77m^3n^3a^5 + 55m^4n^4a^3 - 11m^5n^5a \begin{matrix} -m^{11} \\ -n^{11} \end{matrix} \,\Pi\, o$.

Quare si sit $+a^{11} - qa^9 + sa^7 - xa^5 + ca^3 - fa - g \,\Pi\, o$, erit a summa duarum quantitatum $m + n$, quarum productum $mn \,\Pi\, \frac{1}{11} q$; summa verò æquiundecimensorum ab ipsis, nimirum $+m^{11} + n^{11} \,\Pi\, +g$.

Esto deinde $+a \,\Pi\, +m - n$, & utramque partem $|\overline{\underline{11}}|^{do}$ fit $+a^{11} \,\Pi\, +m^{11} - n^{11}\, (-11m^{10}n + 11mn^{10} \,\Pi) + 11mn \times (-m^9 + n^9 \,\Pi) - a^9 - 9mna^7 - 27m^2n^2a^5 - 30m^3n^3a^3 - 9m^4n^4a\, (+55m^9n^2 - 55m^2n^9 \,\Pi) + 55m^2n^2 \times (+m^7 - n^7 \,\Pi) + a^7 + 7mna^5 + 14m^2n^2a^3 + 7m^3n^3a\, (-165m^8n^3 + 165m^3n^8 \,\Pi) + 165m^3n^3 \times (-m^5 + n^5 \,\Pi) - a^5 - 5mna^3 - 5m^2n^2a\, (+330m^7n^4 - 330m^4n^7 \,\Pi) + 330m^4n^4 \times (+m^3 - n^3 \,\Pi) + a^3 + 3mna\, (-462m^6n^5 + 462m^5n^6 \,\Pi) + 462m^5n^5 \times (-m + n \,\Pi) - a$. Ergo $+a^{11} + 11mna^9 + 44m^2n^2a^7 + 77m^3n^3a^5 + 55m^4n^4a^3 + 11m^5n^5a \begin{matrix} -m^{11} \\ +n^{11} \end{matrix} \,\Pi\, o$.

Quare si sit $+a^{11} + qa^9 + sa^7 + xa^5 + ca^3 + fa$

$-g \Pi o$, erit a differentia duarum quantitatum $+m-n$, quarum productum $mn \Pi \frac{1}{11} q$; differentia verò æquiundecimensorum ab ipsis, videlicet $+m^{11}-n^{11} \Pi +g$.

EXEMPLUM 1um IN NUMERIS.

Esto $+a^{11}-22a^9+176a^7-616a^5+880a^3-352a-96 \Pi o$, fit $a \Pi \sqrt[11]{64} + \sqrt[11]{32}$, quarum productum $\sqrt[11]{2048} \Pi 2$, summa verò æquiundecimensorum ab ipsis est 96.

EXEMPLUM 2um IN NUMERIS.

Esto $+a^{11}+22a^9+176a^7+616a^5+880a^3+352a-1022 \Pi o$, est $+a \Pi +\sqrt[11]{1024}-\sqrt[11]{2}$, quarum productum $\sqrt[11]{2048} \Pi 2$, ut priùs; differentia verò æquiundecimensorum ab ipsis, est 1022.

Atque simili in infinitum progressu obtineri possunt reliquæ æquationes, quarum radices sint summa, vel differentia duorum surdorum, in eodem cum æquationibus gradu existentium.

TERTIA METHODUS UNIVERSALIS PRÆCEDENTES ÆQUATIONES EX MESOLABO ORTAS RESOLVENDI.

Hæc methodus non differt ab ea, quam in resolutione trimensarum æquationum, ab eodem mesolabo ortarum attigimus. Unde nihil aliud hîc agendum est quàm generalem hujus artis resolutoriæ usum in resolvendis ejusdem naturæ æquationibus, quarum videlicet radices per mesolabum explicantur, paucis ostendere. Itaque.

Esto $+a^5-qa^3+fa-t \Pi o$. Per explicatam hujus æquationis genesim agnoscitur in ea intelligendas esse duas radices, quarum productum est $\frac{1}{5} q$, summa verò $\boxed{5}$orum ab ipsis est t.

Quare per præmissum Lemma fit $+tt-\frac{4}{3125} q^5 \Pi$ æquibimenso differentiæ $\boxed{5}$orum, quorum summa est t, & consequenter ipsorum semidifferentia est $+\sqrt{\frac{1}{4} tt - \frac{1}{3125} q^5}$.

quæ addita, vel dempta ab earum semisumma, nempe $\frac{1}{2}t$, efficit $+\frac{1}{2}t+\sqrt{\frac{1}{4}tt-\frac{1}{3125}q^5}$ Π [illegible] r, & $+\frac{1}{2}t-\sqrt{\frac{1}{4}tt-\frac{1}{3125}q^5}$ Π [illegible] ∩. Quare summa radicum ab ipsis, sive radix propositæ æquationis est

$$+\sqrt[5]{+\frac{1}{2}t+\sqrt{\frac{1}{4}tt-\frac{1}{3125}q^5}}+\sqrt[5]{+\frac{1}{2}t-\sqrt{\frac{1}{4}tt-\frac{1}{3125}q^5}}\ \Pi+a.$$

Eodem argumento concludetur ex æquatione $+a^7-qa^5+fa^3-xa-z\ \Pi\ o$ radicem esse

$$\left.\begin{array}{l}+\sqrt[7]{+\frac{1}{2}z+\sqrt{\frac{1}{4}zz-\frac{1}{117649}q^7}}\\ +\sqrt[7]{+\frac{1}{2}z-\sqrt{\frac{1}{4}zz-\frac{1}{117649}q^7}}\end{array}\right\}\ \Pi+a.$$

& æquationis $+a^{11}-qa^9+fa^7-xa^5+ca^3-fa-g\ \Pi\ o$ radicem esse

$$\left.\begin{array}{l}+\sqrt[11]{\frac{1}{2}g+\sqrt{\frac{1}{4}gg-\frac{1}{285311670611}q^{11}}}\\ +\sqrt[11]{\frac{1}{2}g-\sqrt{\frac{1}{4}gg-\frac{1}{285311670611}q^{11}}}\end{array}\right\}\ \Pi+a.$$

Atque sic in infinitum.

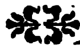
EXEMPLA IN NUMERIS.

PRIMUM.

Esto ut in genesi $+a^5-10a^3+20a-18\ \Pi\ o$. Hîc
$\qquad\qquad -q \quad +f \quad -t$
$+10\ \Pi+q$ & $+18\ \Pi+t$, ergo $+\frac{1}{5}q\ \Pi+2$ & $+\frac{1}{3125}q^5\ \Pi+32$, quare per canonis leges fit

$$+\sqrt[5]{+9+\sqrt{81-32}}+\sqrt[5]{+9-\sqrt{81-32}}\ \Pi+a,$$

id est $+\sqrt[5]{16}+\sqrt[5]{2}\ \Pi+a$, ut in hujus æquationis genesi monstratum est.



SECUNDUM.

Eſto ut in geneſi $+a^7 - 14a^5 + 56a^3 - 56a - 66 \,\Pi\, o.$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - q \quad + s \quad - x \quad - z$

Hîc $+14 \,\Pi\, + q$ & $z \,\Pi\, 66$, atque $\frac{1}{7} q \,\Pi\, 2$: nec non $\frac{+1}{117649} q^7 \,\Pi\, +128$. Quare per canonis leges fit

$$\left.\begin{array}{l} +\sqrt[7]{+33+\sqrt{+1089-128}} \\ +\sqrt[7]{+33-\sqrt{+1089-128}} \end{array}\right\} \Pi + a;$$

Ideſt $+a \,\Pi\, +\sqrt[7]{64} + \sqrt[7]{2}$, ut in hujus æquationis geneſi monſtratum eſt.

TERTIUM.

Eſto ut in geneſi $+a^{11} - 22a^9 + 176a^7 - 616a^5$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - q \quad + s \quad - x$
$+880a^3 - 352a - 96 \,\Pi\, o$. Hîc $+96 \,\Pi\, + g$, & $+22$
$+ c \quad - f \quad - g$
$\Pi\, q$, atque $\frac{1}{11} q \,\Pi\, 2$, nec non $\frac{1}{285311670611} q^{11} \,\Pi\, +2048$.

Quare per canonis leges habetur

$$\left.\begin{array}{l} +\sqrt[11]{+48+\sqrt{2304-2048}} \\ +\sqrt[11]{+48-\sqrt{2304-2048}} \end{array}\right\} \Pi + a.$$

Ideſt $+\sqrt[11]{64} + \sqrt[11]{32} \,\Pi\, a$, ut in hujus æquationis geneſi monſtratum eſt.

Eſto deinde $+a^5 + qa^3 + sa - t \,\Pi\, o$. Per explicatam hujus æquationis geneſim agnoſcitur in ea intelligendas eſſe duas radices, quarum productum eſt $\frac{1}{5} q$, differentia verò $\boxed{5}$orum ab ipſis eſt $+t$.

Quare per præmiſſum lemma fit $+tt \frac{+4}{3125} q^5 \,\Pi$ æquibimenſo aggregati 2 $\boxed{5}$orum, unde ipſum aggregatum eſt

$\sqrt{\ } +$

$\sqrt{+tt+\frac{4}{3125}q^5}$, cujus dimidium est $\sqrt{+\frac{1}{4}tt+\frac{1}{3125}q^5}$ cui addita, vel dempta semidifferentia ipsorum $\boxed{\,}$orum nempe $\frac{1}{2}t$ fit $+\frac{1}{2}t+\sqrt{\frac{1}{4}tt+\frac{1}{3125}q^5}$ Π $\boxed{\,}^p$, & $-\frac{1}{2}t+\sqrt{\frac{1}{4}tt+\frac{1}{3125}q^5}$ Π $\boxed{\,}^q$, differentia verò radicum ab ipsis, sive radix propositæ æquationis est

$$\left.\begin{array}{l} +\sqrt[5]{+\frac{1}{2}t+\sqrt{+\frac{1}{4}tt+\frac{1}{3125}q^5}} \\ -\sqrt[5]{-\frac{1}{2}t+\sqrt{\frac{1}{4}tt+\frac{1}{3125}q^5}} \end{array}\right\} \Pi + a.$$

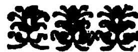
Eodem argumento concludetur ex æquatione $+a^7+qa^5+fa^3+xa-z$ Π o radicem esse

$$\left.\begin{array}{l} +\sqrt[7]{+\frac{1}{2}z+\sqrt{\frac{1}{4}zz+\frac{1}{117649}q^7}} \\ -\sqrt[7]{-\frac{1}{2}z+\sqrt{\frac{1}{4}zz+\frac{1}{117649}q^7}} \end{array}\right\} \Pi + a$$

& ex æquatione $+a^{11}+qa^9+fa^7+xa^5+ca^3+fa-g$ Π o, radicem esse

$$\left.\begin{array}{l} +\sqrt[11]{+\frac{1}{2}g+\sqrt{\frac{1}{4}gg+\frac{1}{285311670611}q^{11}}} \\ -\sqrt[11]{-\frac{1}{2}g+\sqrt{\frac{1}{4}gg+\frac{1}{285311670611}q^{11}}} \end{array}\right\} \Pi + a$$

& sic in infinitum.



EXEMPLA IN NUMERIS.

PRIMUM.

Esto $+a^5 + 10a^3 + 20a - 4 \,\Pi\, 0$. Fit $+t \,\Pi\, 4$, &
$\quad +q \quad +f \quad -t$
$+10 \,\Pi\, q$, quare $\frac{1}{5} q \,\Pi\, 2$, & per canonis leges habetur

$$+a \,\Pi + \sqrt[5]{+2+\sqrt{+4+32}} - \sqrt[5]{-2+\sqrt{+4+32}}.$$

Idest $\sqrt[5]{8} - \sqrt[5]{4} \,\Pi\, a$ ut in hujus æquationis genesi monstratum est.

SECUNDUM.

Esto $+a^7 + 14a^5 + 56a^3 + 56a - 62 \,\Pi\, 0$, Fit $z \,\Pi\, 62$ & $+14 \,\Pi$
$\quad +q \quad +f \quad +x \quad -z$
$+q$ atque $\frac{1}{7} q \,\Pi\, 2$. Quare per canonis leges habetur

$$+a \,\Pi + \sqrt[7]{+31+\sqrt{+961+128}} - \sqrt[7]{-31+\sqrt{+961+128}}$$

Idest $+\sqrt[7]{64} - \sqrt[7]{2} \,\Pi + a$, ut in hujus æquationis genesi ostensum est.

TERTIUM.

Esto $+a^{11} + 22a^9 + 176a^7 + 616a^5 + 880a^3$
$\quad +q \quad +f \quad +x \quad +c$
$+352a - 1022 \,\Pi\, 0$. Fit $1022 \,\Pi + g$, & $\frac{1}{11} q \,\Pi\, 2$. Quare
$+f \quad -g$
per canonis leges habetur

$$\left.\begin{array}{l} +\sqrt[11]{+511+\sqrt{261121+2048}} \\ -\sqrt[11]{-511+\sqrt{261121+2048}} \end{array}\right\} \Pi + a$$

Idest $\sqrt[11]{1024} - \sqrt[11]{2} \,\Pi\, a$, ut arguit hujus æquationis genesis.

ALITER.

Esto ut priùs $+a^5 + qa^3 + fa - t \,\Pi\, o$. Ponatur $+e^5$ $\Pi\, |\overline{\underline{5}}|\, r$, ergo $+e^5 - t \,\Pi\, |\overline{\underline{5}}|\, \eta$, ut patet ex natura propositæ æquationis; & ex generali lemmate præmisso fit

$$\square\, \overline{2e^5 - t}\, \Pi + tt \frac{+4}{3125} q^5 \text{, ergo}$$

$$+\frac{1}{2}t + \sqrt{\frac{1}{4}tt \frac{+1}{3125}q^5}\ \Pi + e^5. \text{ Ergo } +a\ \Pi$$

$$+\sqrt[5]{+\frac{1}{2}t + \sqrt{\frac{1}{4}tt \frac{+1}{3125}q^5}} - \frac{\frac{1}{5}q}{\sqrt[5]{+\frac{1}{2}t + \sqrt{\frac{1}{4}tt \frac{+1}{3125}q^5}}}$$

Eandem methodum sequendo, reliquæ æquationes affectæ, & per mesolabum resolubiles ad puras revocabuntur.

SCHOLIUM.

Quamvis hæ radicum extractiones suam habeant ex æquationum genesi certitudinem, nihilominus tamen majoris claritatis ergo, illud idem divisionis ope confirmabimus, quod uno, aut altero exemplo declarasse sufficiet. Itaque brevitatis causâ posito $+\sqrt[3]{16} | +\sqrt[3]{2}\ |\ \Pi$ $+m+n$, & mutando ubique mn in suum valorem $+2$.

I^a ÆQUATIO DIVIDENDA.

a^5.	a^4	$-10a^3$.	a^2	$+20$	$-18a$	$\Pi\ o$
o	$+m$	$+m^2$	$-6m$	$-4m^2$	$+4m$	
	$+n$	$+2$	$-6n$	-8	$+4n$	
	o	$+2$	$+m^3$	-8	$-2m^3$	
		$+n^2$	$+2m$	$-4n^2$	$-4m$	
		-6	$+2n$	$+m^4$	$-4n$	
		$+m^2$	$+n^3$	$+2m^2$	$-2n^3$	
		$+n2$	$-4m$	$+2n^2$	$+16$	
		o	$-4n$	$+n^4$	$+2m^3$	
			$+m^3$	$+4$	$+2n^3$	
			$+n^3$	$-2m^2$	$+2$	
			o	$-2n^2$	o	
				$+m^4$		
				$+n^4$		
				o		

DIVISOR.

$+a - m - n\ \Pi\ o.$

$+a^4$	$+ma^3$	$-6a^2$	$-4ma$	$+4$	$\Pi\ o.$
	$+n$	$+m^2$	$-4n$	$-2m^2$	
		$+n^2$	$+m^3$	$-2n^2$	
			$+n^3$	$+m^4$	
				$+n^4$	

2ª. ÆQUATIO DIVIDENDA.

Posito $\sqrt[5]{8} - \sqrt[5]{4} \;\Pi\; +m-n$

a^5.	a^4	$+10a^3$.	a^2	$+20a$	-4	$\Pi\, o$.
—	$+m$	$+m^2$	$+6m$	$+4m^2$	$+4m$	
0	$-n$	-2	$-6n$	-8	$-4n$	
	0	-2	$+m^3$	-8	$+2m^3$	
		$+n^2$	$-2m$	$+4n^2$	$-4m$	
		$+6$	$+2n$	$+m^4$	$+4n$	
		$+m^2$	$-n^3$	$-2m^2$	$-2n^3$	
		$+n2$	$+4m$	$-2n^2$	$+8$	
		0	$-4n$	$+n^4$	$-2m^3$	
			$+m^3$	$+4$	$+2n^3$	
			$-n^3$	$+2m^2$	-4	
			0	$+2n^2$	0	
				$+m^4$		
				$+n^4$		
				0		

DIVISOR.

$+a - m + n \;\Pi\; o$,

$+a^4$	$+ma^3$	$+6a^2$	$+4ma$	$+4$	$\Pi\, o$.
	$-n$	$+m^2$	$-4n$	$+2m^2$	
		$+n^2$	$+m^3$	$+2n^2$	
			$-n^3$	$+m^4$	
				$+n^4$	

Atque sic ex divisionis legibus abundè confirmatur radicem æquationis $+a^5 - 10a^3 + 20a - 18 \;\Pi\; o$ esse $+\sqrt[5]{16} + \sqrt[5]{2}$; Et radicem æquationis $+a^5 + 10a^3 + 20a - 4 \;\Pi\; o$ esse $+\sqrt[5]{8} - \sqrt[5]{4}$, quod ante ex harum æquationum genesi demonstratum fuit.

MONITUM.

Ut proposita æquatio in 5° gradu consistẽs per traditam Regulam solvi possit non sufficit ut eodem modo affecta sit, ac exemplaris æquatio $+a^5 - qa^3 + sa - t \;\Pi\; o$, sed adhuc requiritur ut $+\frac{1}{25}qq \;\Pi\; +\frac{1}{5}s$, omninò juxta naturam originalis æquationis $+a^5 - 5mna^3 + 5m^2n^2 - m^5 \;\Pi\; o$. Idem ferto judicium de aliis adventitiis æqua-
$-n^5$
tionibus ad altiores gradus ascendentibus, ubi expositis præceptis locus non esset, nisi in ipsis intermediorum terminorum coëfficientes eandem inter se relationem haberent, quam habent ad invicem intermediorum terminorem coëfficientes in æquationibus originalibus, sive per viam generationis inventis.

Extant aliæ æquationum per mesolabum resolubilium generationes, quas in alio opere trademus, cum earum resolutione.

ADDITAMENTA QUÆDAM.

NOVA METHODUS EXTRAHENDI RADICEM SUBÆQUIBIMENSAM EX QUIBUSCUMQUE BINOMIIS.

Regula.

QUANDO binomii majus nomen est absolutum, minus verò surdum dividatur □um minoris nominis per 4, & quotus inde proveniens $+aa$ æquabitur majori nomini absoluto, ducto in incognitam *a*. Quare si hujus æquationis radices extrahantur, erunt harum radicum radices subæquibimensæ, eæ quæ requiruntur.

Quandò verò propositi binomii minus nomen est absolutum, existente majori surdo; vel etiam quando ambo nomina sunt surda, dividatur □um minoris nominis per 2, & quotus inde proveniens ablatus à □o majoris nominis residuum dabit, quod in incognitam *a* ductum æquabitur $\boxed{4}^{o}$ minoris nominis, per 2 primùm divisi $+aa$. Unde si ex hac æquatione radices extrahantur, erunt harum radicum radices subæquiquadrimensæ, eæ quæ requiruntur.

Idem per Notas.

Quando proponitur $+c+\sqrt{d}|$, estque $+c\,\text{F}+\sqrt{d}|$, Quæratur valor sequentis æquationis $+aa+\frac{1}{4}d\,\Pi+ca$, vel $+aa\,\Pi+ca-\frac{1}{4}d$, & fiet $+a\,\Pi+\frac{1}{2}c\pm\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{4}d}|$.

Quare per canonis leges habetur

$$+\sqrt{\tfrac{1}{2}c+\sqrt{\tfrac{1}{4}cc-\tfrac{1}{4}d}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}c-\sqrt{\tfrac{1}{4}cc-\tfrac{1}{4}d}}\ \Pi\ \sqrt{+c+\sqrt{d}}$$

Quando verò datur $+c+\sqrt{d}$ estque $\sqrt{d}\ \sqsupset\ c$; vel etiam quando datur $+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ estque $\sqrt{c}\ \sqsubset\ \sqrt{d}$. In 1ª hypothesi quæratur valor sequentis æquationis $\begin{matrix}+da\\-\tfrac{1}{2}cc\end{matrix}\ \Pi +\tfrac{1}{16}c^4+aa$, vel $+aa\ \Pi\ \begin{matrix}+da\\-\tfrac{1}{2}cc\end{matrix}-\tfrac{1}{16}c^4$, & fiet $+a\ \Pi$

$+\tfrac{1}{2}d-\tfrac{1}{4}cc\pm\sqrt{\dfrac{+d^2-dc^2}{4}}$. Quare per canonis leges habetur

$$\left.\begin{matrix}+\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}d-\tfrac{1}{4}cc+\sqrt{\dfrac{dd-dcc}{4}}}\\[2ex]+\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}d-\tfrac{1}{4}cc-\sqrt{\dfrac{dd-dcc}{4}}}\end{matrix}\right\}\Pi\ \sqrt{+c+\sqrt{d}}.$$

At in 2ª hypothesi quæratur valor sequentis æquationis $\begin{matrix}+da\\-\tfrac{1}{2}c\end{matrix}\ \Pi +\tfrac{1}{16}cc+aa$ vel $+aa\ \Pi\ \begin{matrix}+da\\-\tfrac{1}{2}c\end{matrix}-\tfrac{1}{16}cc$, & fiet $+a\ \Pi +\tfrac{1}{2}d-\tfrac{1}{4}c\pm\sqrt{\dfrac{+dd-dc}{4}}$. Quare per canonis leges habetur

$$\left.\begin{matrix}+\sqrt[4]{+\tfrac{1}{2}d-\tfrac{1}{4}c+\sqrt{\dfrac{+dd-dc}{4}}}\\[2ex]+\sqrt[4]{+\tfrac{1}{2}d-\tfrac{1}{4}c-\sqrt{\dfrac{+dd-dc}{4}}}\end{matrix}\right\}\Pi\ \sqrt{+\sqrt{c}+\sqrt{d}}.$$

IN PRIMO CASU.

EXEMPLUM PRIMUM.

Propositum binomium esto $+27+\sqrt{704}$, cujus radix sit extrahenda.

Quoniam hîc majus nomen est absolutum, Idcirco di-

vidatur □um minoris nominis 704 per 4 hoc modo $\frac{704}{4}$ Π + 176. Quare per Regulam fit + aa + 176 Π + 27a vel + aa Π + 27a — 176 & consequenter + a Π + $\frac{27}{2}$ +— $\left(\sqrt{\frac{+729-176}{4}}\,\Pi\right)\frac{5}{2}$. Idest + a Π + 16, vel + a Π + 11. Ergo + 4 + √11|, est radix quæsita. Vel si datum fuisset + 27 — √704| radix quæsita foret + 4 — √11|, ut manifestum est.

EXEMPLUM SECUNDUM.

Propositum binomium esto + 5 + √24|, cujus radix sit invenienda. Quoniam hîc adhuc majus nomen est absolutum, idcirco dividatur $\frac{24}{4}$ (6. Ergo per Regulam + 6 + aa Π + 5a, vel + aa Π + 5a — 6, ergo + a Π + $\frac{5}{2}$ $\frac{+}{-}$ $\left(\frac{\sqrt{25}-6}{4}\,\Pi\right)\frac{1}{2}$, Idest + a Π + 3 vel + a Π + 2, & consequenter + √3| + √2| est radix quæsita. Et si haberetur + 5 — √24| , Radix quæsita foret + √3| — √2|, ut manifestum est.

IN IIo CASU.

EXEMPLUM Ium.

Esto binomium + 10 + √180|, cujus radix sit invenienda. Quoniam hîc majus nomen est surdum, idcircò dividatur $\frac{100}{2}$ (50, & + 180 Π + 130. Ergo per regulam + 130a — 50 Π + 625 + aa, vel + aa Π + 130a — 625. Quare + a Π + 65 ± (√+4225 — 625| Π) 60 , ideft + a Π + 125 vel + a Π + 5, ergo per canonis leges habetur + $\sqrt[4]{125}$| + $\sqrt[4]{5}$| Π √ + 10 + √180||

EXEMPLUM 2um.

Propoſitum binomium eſto $+\sqrt{27}\,|+\sqrt{24}\,|$, cujus radix ſit invenienda.

Quoniam hîc ambo nomina ſunt ſurda, idcircò dividatur, ut priùs, $\frac{24}{2}$ (12 & $+27 \,\Pi\, +15$, unde per regulam
-12
fit $+15a \,\Pi\, +aa +36$, vel $+aa \,\Pi\, +15a -36$. Ergo $+a$ $\Pi + \frac{15}{2} \pm (\sqrt{\frac{225}{4} - 36}\,| \,\Pi\,) \frac{9}{2}$. Ideſt $+a \,\Pi\, +12$, vel $+a$ $\Pi\, +3$, ergo per canonis leges habetur $+\sqrt[4]{12}\,| + \sqrt[4]{3}\,| \,\Pi$ $\sqrt{+\sqrt{27}\,|+\sqrt{24}\,|}\,|$. Et ſi haberetur $+\sqrt{27}\,| -\sqrt{24}\,|$ foret $+\sqrt[4]{12}\,| -\sqrt[4]{3}\,| \,\Pi\, \sqrt{+\sqrt{27}\,|-\sqrt{24}\,|}\,|$. Ut manifeſtum eſt.

SCHOLIUM.

Nolim veteri methodo, quæ ſimpliciſſima, & valde naturalis eſt, hanc noſtram præferre, ipſa tamen ſuam habet elegantiam, cum aliqua utilitate conjunctam: Non enim hîc, ut in antiqua, neceſſe eſt inveſtigare utrum duo ſurda ſint inter ſe commenſurabilia, quod aliquando non exigui laboris eſt. Ut ut ſit juvabit rem eandem pluribus modis efficere poſſe.

METHODUS UNIVERSALIS, ET FACILLIMA
EXTRAHENDI RADICES EX QUIBUSCUMQUE BINOMIIS, RADICEM BINOMIAM, ET PLANAM HABENTIBUS.

PRÆPARATIO.

1° ut res quàm maximè facilis evadat, & ad unam, aut alteram difficultatem redigatur, fractiones, ſi quæ ſint, à dato binomio eximantur. 2° ſi ambæ partes propoſiti binomii ſint ineffabiles, reducatur ad aliud binomium, cujus altera pars ſit effabilis, ut docet Schootenius in ſuis commentariis ad librum 3um Geometriæ Carteſii. Ultimò tollatur è radicalis ſigni vinculo pars abſoluta, ſive pars radici analoga, quæ cum reliqua parte coefficiente quantitatem in vinculo comprehenſam producit, hoc eſt, dividatur

vidatur quantitas signo radicali affecta, sive ea sit simplex, sive è pluribus composita per potestatem, signo analogam, ex cujus in quotum è divisione nascentem ductu genita fuerit. Atque hujus potestatis, sive ea sit □, sive |3| & cæt. radix, relictam in vinculo coefficientem quantitatem, sive quotum multiplicans, substituatur in locum illius partis dati binomii, quæ ineffabilis est. Ut si detur $\sqrt{12}$|, quoniam numerus 12 provenit ex ductu □ⁱ 4×3, relinquatur in vinculo coefficiens 3 hoc modo $\sqrt{3}$|, & sic obtinebitur pars surda, sive ineffabilis quæsitæ radicis. Tum radix ex □° 4 sumatur, quæ est 2, & tandem in locum $\sqrt{12}$| subrogetur $2\sqrt{3}$|. Hæc autem coefficiens potestas, sive □, sive |3| & cæt. facile invenitur quærendo divisores omnes quantitatis vinculo conclusæ. Si verò in quantitatibus integris, vel fractis, quæ vinculo continentur, remanente earumdem specie, nulla potestas radici analoga reperiri posset, quæ quantitatem, signi radicalis vinculo constrictam dividere posset, argumentum esset datum binomium quæsitâ radice carere, sed eam tantùm per radicale signum denotari posse. His præmissis nomen surdum vel erit simplex, vel aliquâ quantitate absolutâ afficietur, quæ ipsum multiplicabit. Atque hi duo casus duabus diversis hypothesibus indigent, sicut infra patebit. Itaque

REGULA GENERALIS.

Supponatur binomium $+ d + \sqrt{c}$|, vel $+ d + p\sqrt{c}$|, prout opus erit, sicut dictum est, æquale quæsitæ radici. Suppositum hoc binomium in se multiplicetur secundum exigentiam quæsitæ radicis, ter quidem si $\sqrt[4]{}$ sit extrahenda; quinquies si de $\sqrt[6]{}$ quæstio sit, & sic de cæteris. Atque hoc modo duæ obtinebuntur partes, quarum una absoluta erit, hoc est nullo radicali signo implicita, quæ respondebit parti absolutæ dati binomii, cujus etiam valor erit: altera verò cujus termini surdâ quantitate affecti erunt, & respondebit quantitati partem ineffabilem dati binomii multiplicanti, cujus quoque valor erit.

Posteà in locum c, & genitarum inde potestatum substituatur ejus valor, nempe sæpius nominatum residuum, quod in vinculo reperitur, postquam ab hoc vinculo potestas radici analoga liberata est, sicut diximus in præparatione, nisi mavis initio operis dictum residuum vinculo astrictum ponere loco $\sqrt{c}\,|$. Atque ex duabus æquationibus, quæ per collationem partium effecti binomii cum reciprocis dati binomii partibus multifariam inveniri potest quæsitæ radicis pars absoluta, sive quæ nullo radicali signo afficitur, sicut exempla docebunt.

PRIMUS CANON

PRO EXTRACTIONE $\sqrt[3]{\;}$ IN 1° CASU.

Esto $+d+\sqrt{c}\,|$, quod binomium ter in se ductum efficit $\left.\begin{matrix}+d^3 & +3dd\\ +3cd & +c\end{matrix}\right\}\sqrt{c}\,|\ \Pi\ \boxed{3}\,\overline{+d-\sqrt{c}}\,|$ vel posito $+d-\sqrt{c}\,|$ habetur $\left.\begin{matrix}+d^3 & -3dd\\ +3cd & -c\end{matrix}\right\}\sqrt{c}\,|\ \Pi\ \boxed{3}\,\overline{+d-\sqrt{c}}\,|$.

Jam sit propositum binomium $+m+n\sqrt{c}\,|$, ad hanc formam redactum per ea, quæ supra dicta sunt. Igitur $+d^3+3cd-m\ \Pi\ o$, & $+3dd+c-n\ \Pi\ o$.

EXEMPLUM PRIMUM.

Esto $+26+\sqrt{675}\,|$, cujus $\sqrt[3]{\;}$ sit extrahenda.

Per præparationem tollatur è radicalis signi vinculo quicquid est absolutum, & sic obtinebitur $+26+15\sqrt{3}\,|$. Ergo $+d^3+3cd-26\ \Pi\ o$, Et $+3dd+c-15$, & valore c, nempe 3 in ejus locum subrogato oritur $+d^3+9d-26\ \Pi\ o$, &$+3dd-12\ \Pi\ o$. Idest $+dd\ \Pi\ +4$, & consequenter $d\ \Pi\ 2$. Quare propositi binomii $+26+\sqrt{675}\,|$ quæsita radix est $+2+\sqrt{3}\,|$.

Potest etiam inveniri idem valor quantitatis d, quærendo radicem æquationis $+d^3+9d-26\ \Pi\ o$, quod admodum facile est, quoniam illius radix semper est numeris absolutus, & solâ divisorum ultimum terminum dividentium inquisitione perficitur.

Si propositum binomium esset $+26-\sqrt{675}\,|$, inveni-

retur pro dati binomii radice $+2-\sqrt{3}$, vel si datum foret $-2+\sqrt{3}$ proveniret $-2+\sqrt{3}$ pro dati binomii radice, ut manifestum est.

EXEMPLUM SECUNDUM

EX GEOMETRIA CARTESII PAG. 393

Proponatur $+44+\sqrt{1944}$, cujus $\sqrt[3]{\ }$ sit extrahenda. Fiat per præparationem $+44+18\sqrt{6}$. Ergo $+3dd+c-18\,\Pi\,o$, & sit $c\,\Pi\,6$, quo valore in locum c subrogato fit $+3dd-12\,\Pi\,o$, Id est $dd\,\Pi+4$, & $d\,\Pi\,2$. Ergo $+2+\sqrt{6}\,\Pi\,\sqrt[3]{+44+\sqrt{1944}}$.

SECUNDUS CANON

PRO EXTRACTIONE $\sqrt[3]{\ }$ IN SECUNDO CASU.

Esto $+d+p\sqrt{c}$, quod binomium ter in se ductum efficit $\left.\begin{matrix}+d^3 & +3ddp \\ +3dcp^2 & +p^3c\end{matrix}\right\}\sqrt{c}\;\Pi\;\boxed{3}\;\overline{+d+p\sqrt{c}}$.

Jam sit datum binomium $+m+n\sqrt{c}$. Igitur $+d^3+3dcp^2-m\,\Pi\,o$, & $+3ddp+p^3c-n\,\Pi\,o$.

Ut autem habeatur d quæratur valor sequentis æquationis $+y^3-6my^2 \begin{matrix}-15mm \\ +27cnn\end{matrix}\, y-8m^3\,\Pi\,o$.

Cognitâ autem y statim nascetur d. Etenim $\sqrt{\frac{1}{3}y}\,\Pi\,d$.

EXEMPLUM EX GEOMETRIA CARTESII PAG. 392.

Detur binomium $+25+\sqrt{968}$.

Per præparationem fit $+25+22\sqrt{2}$, estque $m\,\Pi\,25$, $n\,\Pi\,22$, & $c\,\Pi\,2$.

Jam ut habeatur radix æquationis $+y^3-6my^2 \begin{matrix}-15mm \\ +27cnn\end{matrix}\, y-8m^3\,\Pi\,o$.



OPERATIONES.

Mult. 1ª	Mult. 2ª	Mult. 3ª	Subduct.
$+my^2 \Pi +25y^2$	$+m^2y \Pi +625y$	$+n^2y \Pi +484y$	$+26136y$
×	×	×	$-9375y$
-6	-15	$+27c \Pi +54$	
	$-15m^2y \Pi 3125$		
	625		
$-6my^2 \Pi -150y^2$		$+27cn^2y \Pi$ 1936	$+16761y$
	$-15m^2y \Pi -9375y$	2420	
		$+27cn^2y \Pi +26136y$	

Mult. 4ª
$+mm \Pi +625$
×
$-8m \Pi -200$
$-8m^3 \Pi -125000$

Quare $+y^3 -150y^2 +16761y -125000 \Pi o$; & fit $+y \Pi +8$. Ergo per canonis leges habetur $+d \Pi \left(\sqrt[3]{\frac{8}{8}} \Pi\right) +1$. At $p \Pi \left(\sqrt{\frac{m-d^3}{3cd}} \Pi \sqrt{\frac{25-1}{6}} \Pi\right) 2$.

Ideoque propositi binomii $+25+\sqrt{968}$ quæsita radix fit $+1+2\sqrt{2}$.

Huic similes æquationes inveniri possunt ut habeatur d, in extractione $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[7]{}$, & cæt. dati binomii, quando surdum absolutâ quantitate afficitur, sed cùm res sit plena laboris, meliùs erit ex integris factoribus quantitatis surdum afficientis illum seligere, qui debet esse æqualis p in hypothetica radice $+d+p\sqrt{c}$. Quod facilè fiet examinando illos ordine, donec in idoneum incideris, eodem modo quo in æquationum divisionibus examinantur divisores ultimi termini, qui illum absque fractione dividere possunt. Verbi gratiâ, quoniam in dato binomio $+25+22\sqrt{2}$, cujus $\sqrt[3]{}$ extrahi debet, quantitas surdum afficiens, nempe 22 factores habet 2, & 11. Supponatur $p \Pi 2$, quo valore in ejus locum subrogato in 2ª canonis æquatione $+3d^2p+p^3c-22 \Pi o$, habetur $+6d^2-6 \Pi o$, id est $+dd \Pi +1$, & fit $+d \Pi +1$. Est verò 1ª Canonis æquatio $+d^3+3cp^2d-25 \Pi o$, in qua valoribus, d, p

& c in eorum loca substitutis fit $+1+24-25\,\Pi\,o$. Quod cùm verùm sit, constat $p\,\Pi\,2$. Si verò hujus æquationis termini per subrogationem valorum d, p & c non evanuissent, necessarium fuisset alium factorem surdum afficientis supponere æqualem p, & eadem arte tentare utrum assumptus valor ipsi conveniret.

PRIMUS CANON

PRO EXTRACTIONE $\sqrt{}$ IN 1° CASU.

Esto $+d+\sqrt{c}|$, quod binomium quinquies in se ductum efficit.

$$\left.\begin{array}{ll} +d^5 & +5d^4 \\ +10d^3c & +10cd^2 \\ +5ccd & +cc \end{array}\right\} \sqrt{c}\,|\;\Pi\;\left|\tfrac{1}{5}\right|\overline{+d+\sqrt{c}|}\,|.$$

Jam sit propositum binomium $+m+n\sqrt{c}|$, ad hanc formam redactum per ea quæ in præparatione dicta sunt.

Igitur $+d^5+10d^3c+5ccd-m\,\Pi\,o$, & $+5d^4+10cd^2+cc-n\,\Pi\,o$.

EXEMPLUM EX GEOMETRIA CARTESII, *Pag.* 393.

Proponatur $+176+\sqrt{32000}|$, cujus $\sqrt{}$ sit extrahenda.

Per præparationem invenitur $+176+80\sqrt{5}|$.

Ideoque $+d^5+10cd^3+5ccd-176\,\Pi\,o$, & $+5d^4+10cd^2+cc-80\,\Pi\,o$, & fit $c\,\Pi\,5$, quo valore in ejus locum subrogato habetur $+d^5+50d^3+125d-176\,\Pi\,o$, & $+5d^4+50d^2-55\,\Pi\,o$, id est $+d^4+10d^2-11\,\Pi\,o$, & fit $+d\,\Pi+1$. Ergo quæsita dati binomii $+176+\sqrt{32000}|$ $\sqrt{}$ est $+1\sqrt{5}|$

Potest etiam inveniri idem valor litteræ d, quærendo radicem æquationis $+d^5+50d^3+125d-176\,\Pi\,o$, ut jam notavimus.

SECUNDUS CANON

PRO EXTRACTIONE $\sqrt[5]{}$ IN 2do CASU.

Esto $+d+p\sqrt{c}|$, quod binomium quinquies in se ductum efficit

$$\left.\begin{array}{ll} +d^5 & +5d^4 \\ +10cp^2d^3 & +10cp^3d^2 \\ +5c^2p^4 & +c^2p^5 \end{array}\right\} \sqrt{c}\,|\,\Pi\,|5|\,\overline{+d+p\sqrt{c}|}\,|.$$

Jam sit propositum binomium $+m+n\sqrt{c}|$ ad hanc formam redactum, ut suprà.

Igitur $+d^5+10cp^2d^3+5c^2p^4-m\,\Pi\,o$, & $+5d^4+10cp^3d^2+c^2p^5-n\,\Pi\,o$.

EXEMPLUM.

Esto $+401+\sqrt{177608}|$ cujus $\sqrt[5]{}$ sit extrahenda.

Fiat per præparationem $+401+298\sqrt{2}|$. Iam quia numerus 298 surdum $\sqrt{2}|$ afficiens factores habet 149 & 2. Supponamus 1° in hypothetica radice $+d+p\sqrt{c}|$, literam $p\,\Pi+2$, nempe uni è factoribus 298. Igitur juxta canonis leges operando, & mutatis p & c in suos valores 2, & 2 habetur $+10d^4+160d^2-170\,\Pi o$, idest $+d^4+16d^2$ -17 [illegible], & fit $+d\,\Pi+1$.

Est verò $+d^5+10cp^2d^3+5c^2p^4-m\,\Pi\,o$, ideſt hoc in loco mutatis mutandis $+1+80+320-401\,\Pi\,o$, quod cùm verum sit sequitur $+p\,\Pi+2$, & propositi binomii $+401+\sqrt{177608}|\ \sqrt[5]{}$ esse $+1+2\sqrt{2}|$.

Atque sic in infinitum progredi licet in extractione cujuslibet radicis è dato binomio. Verùm de his dicta sufficiant.

Cartesianam methodum huic nostræ præferat qui volet, haud longè absumus ab eadem sententia: verumtamen traditas regulas eo præsertim nomine dignas censemus, quòd tam earum inventio quàm praxis facillima sit.

METHODUS UNIVERSALIS AUFFERENDI UNUM QUEMLIBET TERMINUM PRIMO EXCEPTO E' QUAVIS ÆQUATIONE PROPOSITA.

Eſto quælibet æquatio $+a^4 - pa^3 + qa^2 - ra + s \,\Pi\, o$.

Fiat $+e + m \,\Pi\, +a \mid +e^2 + 2me + m^2 \,\Pi\, +a^2 \mid +e^3 + 3me^2 + 3m^2e + m^3 \,\Pi\, +a^3$, & in æquatione propoſita ubique mutando a, ejuſque poteſtates, in $+e+m$, ejuſque reciprocas poteſtates, erit

$$\left.\begin{array}{llllll} +e^4 & +4me^3 & +6m^2e^2 & +4m^3e & +m^4 & \Pi +a^4 \\ & -p & -3pm & -3pm^2 & -pm^3 & \Pi -pa^3 \\ & & +q & +2qm & +qm^2 & \Pi +qa^2 \\ & & & -r & -rm & \Pi -ra \\ & & & & +s & \Pi +s. \end{array}\right\} \Pi\, o.$$

Jam liberum eſt ex enata per ſuppoſitionem noſtram æquatione propter arbitrabilem, ſive ad arbitrium ſumptam literam m, quemlibet terminum auferre, primo excepto.

Quare ſi velim 2um terminum auferre. Fiat $+4m - p \,\Pi\, o$, ſive $+\frac{1}{4}p \,\Pi\, +m$, & eadem æquatio

$$\begin{array}{llll} +e^4 & +6m^2e^2 & +4m^3e & +m^4 \,\Pi\, o \\ & -3pm & -3pm^2 & -pm^3 \\ & +q & +2qm & +qm^2 \\ & & -r & -rm \\ & & & +s \end{array}$$

remanebit, verùm 2do termino carens, eo quippe per hypotheſim $+4m - p \,\Pi\, o$ evaneſcente.

Si verò tertium terminum aufferre libuerit fiat $+6m^2 - 3pm + q \,\Pi\, o$, vel $+m^2 \,\Pi\, +\frac{1}{2}pm - \frac{1}{6}q$, & conſequenter $+\frac{1}{4}p + \sqrt{\frac{1}{16}p^2 - \frac{1}{6}q} \,\Pi\, +m$, & eadem æquatio

$$\begin{array}{llll} +e^4 & +4me^3 & +4m^3e & +m^4 \,\Pi\, o \\ & -p & -3pm^2 & -pm^3 \\ & & +2qm & +qm^2 \\ & & -r & -rm \\ & & & +s \end{array}$$

remanebit, verùm tertio termino carens, eo quippe per hypotheſim $+6m^2 - 3pm$

$+q\Pi o$ evanescente. Et hoc deinceps ordine procedendum est ad tollendum quemlibet è reliquis terminis. Sed ex ultimi termini ablatione nihil emolumenti capitur, quoniam ex facienda hypothesi vel proposita æquatio recurrit, ut in hoc exemplo, vel certè inde nascitur æquatio, quæ totidem dimensiones habet quàm proposita, ac præterea ejusdem est naturæ. Ablatio verò penultimi termini æquationem gignit, uno gradu inferiorem eâ, quæ data est, & quæ ideò minorem difficultatem involvit. Minor adhuc difficultas occurret in antepenultimi termini sublatione, nam ex facienda hoc loco hypothesi exsurget æquatio duobus gradibus inferior eâ, quæ proponitur. Uno verbo quot locis distabit terminus auferendus ab ultimo, totidem gradibus inferior eâ, quæ proposita est orietur æquatio, donec ventum erit ad 2um terminum, pro quo aufferendo omnium simplicissima æquatio ex ibi facienda suppositione prodibit. Postquàm autem ablatitium terminum elegerimus, si proveniens ex enata æquatione valor incognitæ & ad arbitrium sumptæ literæ *m*, vel ejus potestates in reliquis terminis subrogentur, habebitur æquatio illo, quem tollere volebamus, termino multata, ut quærebatur.



SOLU-

SOLUTIO PROBLEMATIS A D. WALLISIO TOTIUS EUROPÆ MATHEMATICIS PROPOSITI, SED PRIÙS AD GENERALE REVOCATI, ANNO M. DC. LVIII. EODEM TEMPORE QUO PROPOSITUM EST.

PROBLEMA D. WALLISII.

DATIS Ellypseos maximis diametris, tum puncto in transversa ejus diametro assignato, reperire in numeris segmenta lineæ intra ellypsim terminatæ, & per datum punctum transeuntis, atque datum angulum cum dicta diametro facientis.

Verùm quia propositæ quæstionis solutio æque facilis est in numeris, ac in lineis (ut postea apparebit) meliùs facturum me judicavi si priùs demonstrationem analyticam hîc afferrem, ex qua tam numerica, quàm geometrica sequeretur ad problematis solutionem pertinens effectio. Atque ut hæc solutio cum fœnore detur, speciale D. Wallisii Problema ad generale sic revoco.

PROBLEMA GENERALE.

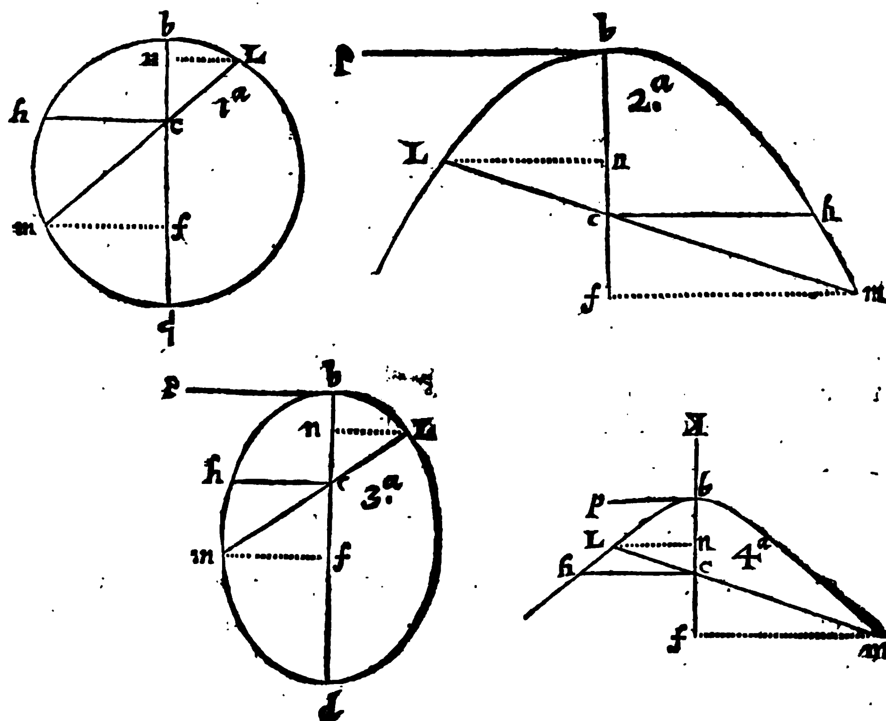
Datâ specie qualibet conicâ sectione, sub qua etiam circulum comprehendo (idest hoc in loco datâ solâ diametro, si sectio sit circulus, vel datis parametro & angulo quem ipsa parameter cum sua diametro efficit, quando est parabola, vel denique datis, atque ad angulum debitum constitutis diametro, & contiguâ parametro, cum est ellypsis, vel hyperbola) tum puncto in interna ejus diametro signato, tam in numeris, quàm in lineis reperire segmenta lineæ intra sectionem terminatæ, & per datum punctum transeuntis, atque datum angulum cum secta diametro facientis.

DETERMINATIO CASUUM.

Hoc Problema duos habet casus, vel enim datus an-

gulus æqualis eſt angulo, quem ſectionis parameter cum ſua diametro conſtituit, vel eidem inæqualis eſt. Primus caſus nullam ferè patitur difficultatem, & tota conſiſtit in ſecundo caſu, quando nempe angulus datus inæqualis eſt angulo ſectionis parametri ad ſuam diametrum applicati.

SOLUTIO PROBLEMATIS IN PRIMO CASU.



DATUM.

PRÆPARATIO 1ª.		
bd Π *d* *bc* Π *b* *cd* Π *c*	*bp* Π *p* *bc* Π *y*	

Detur 1° alicujus circuli diameter *bd*, vel 2° alicujus parabolæ parameter *bp*, & angulus *pbc*, quem ipſa parameter *bp*, cum ſua diametro *bc*, conſtituit, vel 3° alicujus ellypſeos, vel hyperbolæ tranſverſa diameter *bd*, & parameter *bp*, invicem junctæ ad debitum angulum *dbp*. Præterea in

circulo angulus *hcb* sit rectus, in aliis verò figuris æquetur angulo *cbp*. Unde recta *hc*, quæ inveniri debet una erit ex applicatis ad diametrum *bc* in dato puncto *c*, ut constat ex harum sectionum generatione.

DEMONSTRATIO.

Descriptis figuris, ut factum vides. Quoniam 1° in circulo angulus *hcb* rectus est ex natura circuli, ideo $\sqrt{bc}$ Π y. 2° in parabola $\sqrt{bp}$ Π y. 3° in ellypsi, & hyperbola. $d.p :: bc.yy$. Ergo $\frac{bcp}{d}$ Π yy, & $\sqrt{\frac{bcp}{d}}$ Π y, quod erat demonstrandum.

SOLUTIO PROBLEMATIS IN 2° CASU.

PRÆPARATIO 2ª.

bc Π *b* segmentum minus.
cd Π *c* segmentum majus.
$c-b$ Π q differentia segmentorum.
hc Π *m* applicata.
bd Π *d* transversa diameter.
$d+b$ Π n.
cf Π *y* ignota quantitas.

Iisdem quæ prius positis, jam datus angulus *mcf* sit major, vel minor recto in circulo, vel angulo *cbp* in reliquis figuris.

CONSTRUCTIO.

A puncto *m* in diametrum *bc* demittatur in circulo perpendicularis, vel in reliquis figuris parallela parametro *bp*, nempe *mf*, quæ erit una ex applicatis ad diametrum *bc*, & consequenter diversa à recta *mc* quæ ab applicatarum numero excluditur propter concessum imparallelismum linearum *mc*, & *bp*. Demum ducatur applicata *hc*.

DEMONSTRATIO.

Dantur omnes anguli △li *mcf* ex hypothesi, & constructione, ergo datur ratio omnium laterum inter se, videlicet lateris *cf*, ad latus *mf* quam pono ut *z* ad *r*, & voco pri-

mam rationem datam. Deinde ejusdem lateris cf ad latus mc quam pono ut z ad f, hanc voco secundam rationem datam. Unde sequitur $mc . mf :: f . r$. Nam factum ex tribus datis z, r, f $\triangle^{lum}$ proportionale est $\triangle^{lo}$ mcf & hanc ultimam voco rationem 3° datam.

Jam ex hypothesi $z . r :: y . mf$, Ergo $\frac{ry}{z} \, \Pi \, mf$ & $\frac{r^2 y^2}{zz} \, \Pi \, \square \, mf$.

Atqui 1° in circulo $\frac{rryy}{zz} \, \Pi$ ($\square^{lo}$ dfb Π) $bc + qy - yy$, & ordinata æquatione fit $yy \, \Pi \, \frac{bczz + qzzy}{zz + rr}$

Atqui 2° in parabola $\frac{rryy}{zz} \, \Pi$ ($pbf \, \Pi \, pb + py \, \Pi$) $mm + py$ & ordinata æquatione fit $yy \, \Pi$ ($\frac{mm + py}{\frac{rr}{zz}} \, \Pi$) $\frac{m^2 z^2 + pz^2 y}{rr}$

Atqui 3° in Ellypsi $\frac{rryy}{zz} . bc + qy - yy :: mm . bc$. Ergo $\frac{bcrryy}{zz}$ $\Pi \, bcmm + qmmy - mmyy$ & ordinata æquatione fit ($yy \, \Pi \, \frac{+ bcmm + qmmy}{\frac{+ bcrr}{zz} + mm} \, \Pi$) $+ yy \, \Pi \, \frac{+ bcm^2 z^2 + qm^2 z^2 y}{+ bcrr + m^2 z^2}$

Atqui 3° in hyperbola $\frac{rryy}{zz} . bn + \begin{matrix} ny \\ + b \end{matrix} + yy :: mm . bn$.

Ergo $\frac{bnrryy}{zz} \, \Pi + bmmn + \begin{matrix} mmny \\ + bmm \end{matrix} + mmyy$, & ordinata æquatione fit

$$\frac{\left(+bm^2n + m^2ny + m^2y^2 \;\Pi\right)}{\dfrac{+bnrr - mm}{zz}} \begin{matrix} \\ +m^2b \end{matrix} \quad \frac{+bm^2z^2n + m^2z^2ny \;\Pi + yy}{bnrr - m^2z^2} \begin{matrix} \\ +m^2z^2b \end{matrix}$$

Denique cùm ſit in omnibus figuris $z.\ f :: y.\ mc.$ Ergo in omnibus figuris $mc \;\Pi\; \frac{fy}{z}$. Unde cognita per mox inventas æquationes quantitate y, quantitas termini $\frac{fy}{z}$ non latebit. Quod erat demonſtrandum.

ALITER.

Iiſdem quæ priùs poſitis, & ſupponendo $y \;\Pi\; mc$
Ex hypotheſi $f.\ r :: y.\ mf$. Ergo $\frac{ry}{f} \;\Pi\; mf$. & $\frac{rryy}{ff} \;\Pi\; \square\, mf$.

Sed etiam $f.\ z :: y.\ cf$, Ergo $\frac{zy}{f} \;\Pi\; cf$.

Atqui in circulo $\left(\square\; \overline{b + \frac{zy}{f} \times c} \times \overline{c - \frac{zy}{f}} \;\Pi\right)\; bc + \frac{qzy}{f} - \frac{z^2y^2}{ff} \;\Pi\; \frac{r^2y^2}{ff}$ & totum per ff multiplicando fit $bcff + qfzy - z^2y^2 \;\Pi\; r^2y^2$. Unde ordinata æquatione fit $yy \;\Pi\; \frac{bcff + qfzy}{+rr + zz}$.

Atque ſic plures æquationes inſtar præcedentium inſtitui poſſunt.

ADHUC ALITER.

Ponatur $mf \;\Pi\; y$. Jam $z.\ r :: cf.\ y$. Ergo $\frac{zy}{r} \;\Pi\; cf$.

Atqui in circulo $\left(\square\; \overline{+b + \frac{zy}{r}} \times \overline{c - \frac{zy}{r}} \;\Pi\right)\; +bc + qzy - \frac{zzyy}{rr} \;\Pi\; yy$ & totum per rr multiplicando fit

$+ bcrr + qrrzy - zzyy \, \Pi \, rryy$, unde ordinata æquatione habetur $+ yy \, \Pi \, \frac{+ bcrr + qrrzy}{+ rr + zz}$. Atque ſic plures æquationes ad inſtar præcedentium inſtitui poſſunt.

Hîc non immoror in extrahendis aut etiam verbis enunciandis inventarum æquationum radicibus, cùm id exſequi facillimum ſit, & hinc regulas deducere, tam ad geometricam, quàm ad numericam praxim accommodatas.

Multa quoque poſſem Corollaria hinc deducere, qualia ſunt comparatio rectarum, quæ in ſingulis figuris ſupra poſitis per idem punctum ducuntur, & in ellypſi comparatio omnium ſuarum diametrorum, quando datum punctum centrum eſt ellypſeos. Poſſem quoque propoſitum problema oſtendere in lineis curvis, gradatim magis ac magis compoſitis, ut in parabola, quam cubicam vocant, nam præmiſſæ analyſeos veſtigia ſequendo, & ponendo $y \, \Pi \, cf$ haberetur

$$y^3 \, \Pi \, \frac{bp^2z^3 + p^2z^3y}{rrr}, \text{ vel } y^3 \, \Pi \, \frac{+ b^2pz^3 + 2\,bpz^3y + pz^3yy}{rrr};$$

prout cubus ex mf prima, vel ſecunda eſt ex duabus mediis proportionalibus inter bp, & bf. Itaut ex ſpeciali problemate propoſito utiliſſimum, & generale problema effeciſſe mihi videar. Verùm de his aliàs, nunc ad unius problematis ſolutionem hactenus allata ſufficiant.

Quoniam verò poſt inventas pro ſolutione propoſiti problematis æquationes non ſufficit earum radices extrahere, ut habeatur mc, placet coronidis loco, & in exemplum cæterarum primam æquationem verbis enunciare.

ÆQUATIO PRO CIRCULO.

$$yy \, \Pi \, \frac{+ qzzy + bczz}{+ zz + rr}$$

SIC ENUNCIATUR.

Si primæ rationis datæ antecedens in ſe multiplicatus; ſive aliter ejus quadratum ducatur primo in □lum ſub co-

gnitis datæ diametri segmentis, deinde verò in horum segmentorum differentiam; & bina producta separatim dividantur per aggregatum quadratorum ex primæ rationis datæ terminis. Quotusque ex 1ª divisione proveniens addatur ad quartam partem quadrati sub quoto ex 2ᵈᵃ divisione profecto, ac hujus summæ radix quadrata; dimidio quoti secundi contracta, vel aucta multiplicetur in consequentem secundæ rationis datæ terminum. Enata inde producta per antecedentem ejusdem secundæ rationis datæ terminum sigillatim divisa æquabuntur quæsitis ductæ in circulo lineæ segmentis. Sicut manifestum est ex præmissæ æquationis constitutione.

Atque hæc est prima regula, cujus ope tam in numeris, quam in lineis, quæsita ductæ, sicut jubetur, in circulo lineæ segmenta reperiuntur.

FINIS.



EXTRAIT DU PRIVILEGE.

PAR grace & Privilege du Roy, en datte du vingt-sixiéme de May mille six cent soixante sept, Signé DE COTTIBLANCHE, & scellé: Il est permis à M. DULAURENS de faire imprimer, vendre & debiter un Livre par luy composé, intitulé FRANCISCI DULAURENS SPECIMINA MATHEMATICA *duobus Libris comprehensa*, &c. par tel Libraire ou Imprimeur qu'il voudra choisir, pendant sept années. Et defenses sont faites à tous Libraires, Imprimeurs & autres d'imprimer ledit Livre, d'en vendre de contrefaits, ny mesme d'en extraire aucune chose, sans le consentement exprés dudit sieur Dulaurens, ou de ceux qui auront droit de luy, à peine de trois mille livres d'amende, de tous dépens, dommages & interests, & autres peines, comme il est plus amplement porté par ledit Privilege.

Monsieur Dulaurens a choisi Charles Savreux Libraire Iuré à Paris, pour imprimer, vendre & debiter ledit Livre, auquel il a cedé & transporté son droit dudit Privilege. le 20. d'Aoust 1667.

Registré sur le Livre de la Communauté des Libraires, Imprimeurs & Relieurs de Paris, suivant l'Arrest du Parlement en datte du 8. d'Avril 1653. A Paris le 4. Juin 1667. *Signé* THIERRY, Adjoint du Syndic.

Achevé d'imprimer pour la premiere fois le 30. d'Aoust 1667.

Les Exemplaires ont esté fournis suivant le Privilege.

ERRORES CORRIGENDI.

Pag.	*Linea.*	*Errores.*	*Correctiones.*
5.	27.	erementum	incrementum.
21	11.	$\frac{a}{\beta}$	$\frac{q\beta}{\beta}$.
33.	6.	$z\ a$	$z - a$.
45.	32.	nultiplicans	multiplicans.
56.	*in figura*	*pro* F *pone*	E.
57.	*in figura*	*pro* f *pone*	E.
65.	6.	duos buacceptis	duobus acceptis.
81.	13.	Quoanim	Quoniam.
95.	13.	$geHe$	geH
Ibid.	19.	ecolascunt	coalescunt.
115.	30.	*post* æqualium, *pone*	arcus AP, & EO subtendunt.
Ibid.	*penult.*	7li	∠li.
138.	2. & 3.	CG	CK.
Ibid.	19.	rectam DC	CK.
Ibid.	26.	M.	P.
139.	32.	Itaque	Illáque.
162.	4.	earum	quarum.
163.	8.	$a\sqcap$	$a\sqcap b$.
164.	10.	*affectnm*	*affectum.*
188.	12. *in fine*	$\frac{aa}{cc}$	$\frac{aa}{c}$
191.	6.	1a b ⊓ T	1a c F.
192.	3.	$+ c + y$	$+ a + y$.
Ibid.	5. & 13.	& extremarum differentia	sub differentia mediæ & alterius extremæ.
202.	25. & 27.	$+ \frac{1}{3} cc$	$+ cc$.
204.	*ultima.*	$+ r \frac{1}{2}$	$+ \frac{1}{2} r$.
205.	18.	Geometra, imultis	Geometria, multis.
208.	2.	duobus	duabus.
Ibid.	21.	$- dcc$	$- bcc$.
210.	6.	$+ bc^3$	$+ b^3 c$.
Ibid.	34.	$+ a^3 c \sqrt[3]{cdg} \lfloor a$	$+ a^3 - c \sqrt[3]{cdg} \lfloor a$.
215.	22.	$+ sy$	$+ 5y$.
218.	7.	$- rr$	$+ rr$.
Ibid.	11.	$+ \sqrt{\frac{1}{4}pp - y}$	$- \sqrt{\frac{1}{4}pp - y}$
Ibid.	*ultima.*	$+ \sqrt{\frac{1}{4}pp - q - y}$	$- \sqrt{\frac{1}{4}pp - q - y}$.
220.	15.	$+ q$	$- q$.
228.	21.	$- 5mna^3$	$+ 5mna^3$.
235.	21.	$+ 20 - 18a$	$+ 20a - 18$.

Cæteros errores typographicos levioris momenti, aut eos (si qui forte extiterint) quos Authoris incuria, non inscitia fuderit, benignus Lector condonabit.



